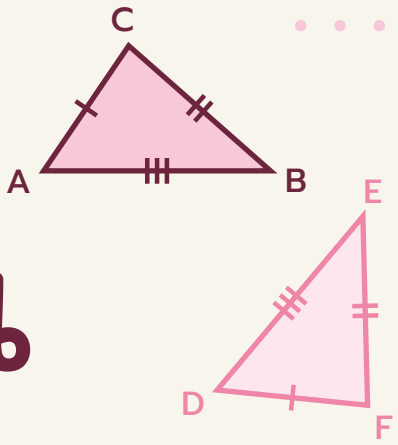
ONE BY ONE
STEP BY STEP

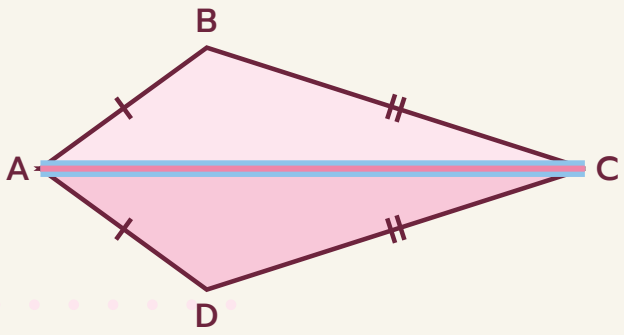


ความเท่ากันทุกประการ

ม.2

10 บทเรียน · ฉบับนักเรียน





AC เป็นด้านร่วม · เท่ากันทุกประการแบบ ด.ด.ด.

ชื่อ _____ นามสกุล _____

ชั้น ม.2/ _____ เลขที่ _____

สารบัญ

บทที่ 1 รูปที่เท่ากันทุกประการ

01 ความเท่ากันทุกประการ	4
02 ส่วนที่สมนัยกัน	6
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1	8

บทที่ 2 เงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการ

03 ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)	10
04 มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)	12
05 ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)	14
06 ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)	16
07 เลือกเงื่อนไขให้ถูก	18
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2	20

บทที่ 3 การนำไปใช้

08 ข้อมูลที่ซ่อนในรูป	22
09 หาความยาว ขนาดของมุม และเขียนเหตุผล	24
10 ความเท่ากันทุกประการในชีวิตจริง	26
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3	28
เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น	30
บันทึกความก้าวหน้าของฉัน	32

ใช้เล่มนี้อย่างไร

ทุกบทเรียนมี 2 หน้า วางโครงเหมือนกันทุกบท เรียนทีละเรื่อง ทีละขั้น

1 หน้าซ้าย · เรียนรู้ผ่านโจทย์
อ่านโจทย์ข้อ 1 และ 2 ดูเครื่องหมายบนรูป (ขีดบอกด้านที่ยาวเท่ากัน ส่วนโค้งบอกมุมที่เท่ากัน) แล้วเติมคำตอบลงในช่องทีละขั้น เพื่อค้นพบวิธีคิดด้วยตัวเอง

2 ก้าวขึ้นอีกขั้น
กล่องสีเทาท้ายหน้า บอกเหตุผลเบื้องหลัง ทางลัด หรือเรื่องที่ต่อยอดได้

3 หน้าขวา · สรุป + ฝึก
อ่านแถบสรุปด้านบน ทำแบบฝึกหัดเบื้องต้นเรียงจากง่ายไปยาก แล้วตรวจกับเฉลยโจทย์หน้าซ้ายและเฉลยท้ายเล่ม

4 แบบทดสอบทบทวน
ท้ายแต่ละบท มีคะแนนกำกับทุกข้อ ลองทำโดยไม่เปิดดูบทเรียน แล้วรวมคะแนน

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเล่ม

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ — รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF (เรียงจุดยอดที่สมนัยกันให้ตรงตำแหน่ง)

$\hat{ABC}$ · $\hat{B}$ — มุม ABC (หมวกอยู่บนจุดยอด B) · เขียนสั้น ๆ ว่ามุม B ได้ · AB = 5 ซม. คือ AB ยาว 5 ซม.

 — ขีดจำนวนเท่ากัน = ด้านยาวเท่ากัน · ส่วนโค้งจำนวนเท่ากัน = มุมขนาดเท่ากัน · สี่เหลี่ยมเล็กที่มุม = มุมฉาก

ด.ม.ด. ม.ด.ม. ด.ด.ด. ฉ.ด.ด. — เงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการ: ด้าน-มุม-ด้าน มุม-ด้าน-มุม ด้าน-ด้าน-ด้าน ฉาก-ด้าน-ด้าน (บทเรียน 03–06)

ทบทวนก่อนเริ่ม

- การเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน (เล่ม 4)
- สร้างรูปสามเหลี่ยม (เล่มการสร้าง ม.1)
- ทฤษฎีบทพีทาโกรัส $c^2 = a^2 + b^2$ (เล่ม 1)
- มุมตรงข้ามมุมยอดเท่ากัน · แก้สมการ (ม.1)



เล่มนี้ไม่ต้องรีบ ทำทีละบทเรียน ถ้าติดตรงไหน ย้อนไปดูโจทย์ข้อ 1–2 ของบทเรียนนั้นอีกรอบ

01 ความเท่ากันทุกประการ

ต่อจากเล่มการแปลงทางเรขาคณิต (เล่ม 4): การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน ไม่เปลี่ยนขนาดและรูปร่างของรูปภาพที่ได้จึงวางทับรูปต้นแบบได้สนิท · มาดูว่ารูปคู่ไหนทับกันได้สนิท และคู่ไหนไม่ได้

โจทย์ข้อ 1 รูปที่ทับกันได้สนิท

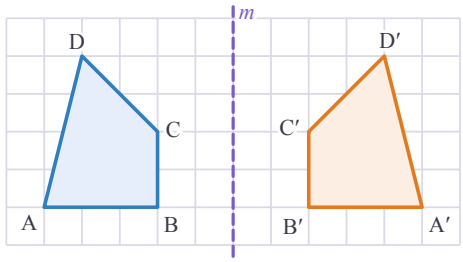
1 พับกระดาษตามเส้น m รูป ABCD จะทับรูป A′B′C′D′ ได้สนิท ภาพนี้ได้จากการ ____

2 วัดด้านที่ทับกัน: AB ยาว ____ ช่อง A′B′ ก็ยาว ____ ช่อง · มุม B กับมุม B′ มีขนาด ____° เท่ากัน

3 ทุกด้านและทุกมุมที่ทับกันจึง ____ ความยาวรอบรูปและพื้นที่ก็เท่ากัน

4 รูปสองรูปที่ทับกันได้สนิท เรียกว่า รูปที่เท่ากันทุกประการ เขียน ABCD ≅ A′B′C′D′ (≅ อ่านว่า เท่ากันทุกประการกับ)

พับตามเส้น m



โจทย์ข้อ 2 รูปร่างเหมือนกัน แต่ขนาดต่างกัน

1 ด้านประกอบมุมฉากของรูปเล็กยาว 2 กับ 3 ช่อง ของรูปใหญ่ยาว ____ กับ ____ ช่อง

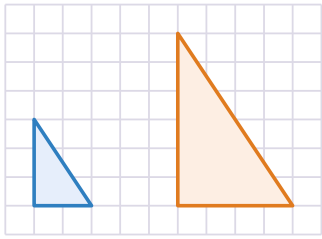
2 ด้านของรูปใหญ่ยาวเป็น ____ เท่าของรูปเล็ก แต่มุมฉากยังเป็นมุมฉาก รูปร่างจึงเหมือนกัน

3 จะเลื่อน หมุน หรือพลิกอย่างไร รูปเล็กก็ทับรูปใหญ่ได้ ____

4 รูปคู่นี้จึง ____ เพราะขนาดต่างกัน

5 ลองอีกข้อ: ถ้าวาดรูปใหม่ที่ด้านประกอบมุมฉากยาว 2 กับ 3 ช่อง รูปใหม่จะ ____ กับรูปเล็ก

ขยายสองเท่า



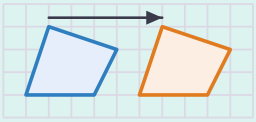
ก้าวขึ้นอีกขั้น

ส่วนของเส้นตรงและมุมก็เท่ากันทุกประการได้

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากัน เช่น AB = CD = 4 ซม. วางทับกันได้สนิทเสมอ จึง ____ มุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากันก็เช่นกัน · ส่วนรูปที่รูปร่างเหมือนกันแต่ขนาดต่างกัน (โจทย์ข้อ 2) เรียกว่า รูปที่คล้ายกัน จะได้เรียนใน ม.3



รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ (≅) เมื่อเลื่อนขนาน สะท้อน หรือหมุนรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท · รูปที่เท่ากันทุกประการมี**ขนาดและรูปร่างเหมือนกัน** ด้านที่ทับกันยาวเท่ากัน มุมที่ทับกันมีขนาดเท่ากัน พื้นที่และความยาวรอบรูปเท่ากัน

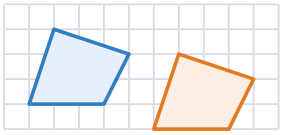


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

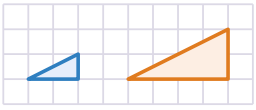
➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

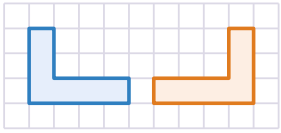
(1) เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐ ได้จากการ ☐



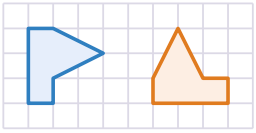
(2) เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐ เพราะขนาด ☐



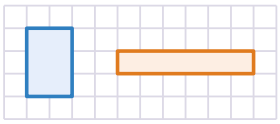
(3) เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐ ได้จากการ ☐



(4) เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐ ได้จากการ ☐



(5) พื้นที่รูปละ ☐ ตารางหน่วย เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐



(6) ใบบัวบอกว่า “รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 2 ซม. ยาว 8 ซม. กับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 4 ซม. มีพื้นที่เท่ากัน จึงเท่ากันทุกประการ” ใบบัวพูดถูกหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 สะท้อน , 3 , 3 , 90 , เท่ากัน

โจทย์ข้อ 2 4 , 6 , 2 , ไม่สนิท , ไม่เท่ากันทุกประการ , เท่ากันทุกประการ

รอบตัวเรา เหรียญสิบบาททุกเหรียญ แผ่นกระเบื้องปูพื้นแบบเดียวกัน และชิ้นส่วนที่ผลิตจากแม่พิมพ์เดียวกัน เท่ากันทุกประการ จึงเปลี่ยนชิ้นที่เสียด้วยชิ้นใหม่ได้พอดี



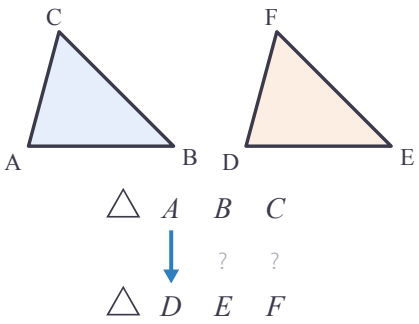
02 ส่วนที่สมนัยกัน

เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ จุดยอดที่ทับกันเรียกว่าจุดคู่ที่สมนัยกัน ด้านที่ทับกันคือด้านคู่ที่สมนัยกัน มุมที่ทับกันคือมุมคู่ที่สมนัยกัน · ลำดับตัวอักษรในประโยค ≅ บอกว่าอะไรคู่กับอะไร

โจทย์ข้อ 1 △ABC ≅ △DEF: อ่านคู่ที่สมนัยกันจากลำดับตัวอักษร

1. ตัวที่ 1 คู่กับตัวที่ 1: A ↔ D · ตัวที่ 2: B ↔ ☐ · ตัวที่ 3: C ↔ ☐
2. ด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน: AB = DE, BC = ☐, CA = ☐
3. มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B}$ = ☐, $\hat{C}$ = ☐
4. รวมส่วนที่สมนัยกันทั้งหมด ☐ คู่ (ด้าน 3 คู่ มุม 3 คู่)

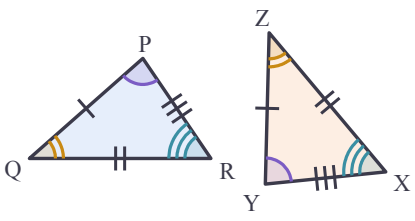
ลูกศรจับคู่จุดยอด



โจทย์ข้อ 2 รูปที่ถูกหมุนหรือพลิก: จับคู่จากเครื่องหมายบนรูป

1. $\hat{P}$ มีส่วนโค้ง 1 เส้น จึงคู่กับมุมที่มีส่วนโค้ง 1 เส้น คือ P ↔ ☐
2. $\hat{Q}$ มีส่วนโค้ง 2 เส้น: Q ↔ ☐ · $\hat{R}$ มีส่วนโค้ง 3 เส้น: R ↔ ☐
3. เขียนประโยค △PQR ≅ △☐
4. ตรวจด้วยขีด: PQ มี 1 ขีด คู่กับ ☐ ซึ่งมี 1 ขีดเหมือนกัน

ขีดเท่ากัน · ส่วนโค้งเท่ากัน



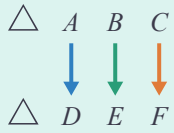
ก้าวขึ้นอีกขั้น

กับดัก: ลำดับตัวอักษรสำคัญ

จากโจทย์ข้อ 1 ถ้าเขียนผิดเป็น △ABC ≅ △EDF จะแปลว่า $\hat{A} = \hat{E}$ แต่ $\hat{A} = 75°$ และ $\hat{E}$ = ☐° ไม่เท่ากัน · ประโยค ≅ ต้องเรียงจุดยอดที่สมนัยกันให้ตรงตำแหน่ง



เขียน △ABC ≅ △DEF ต้อง**เรียงจุดยอดที่สมนัยกันให้ตรงตำแหน่ง · ด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน** · บนรูป ขีดจำนวนเท่ากัน = ด้านยาวเท่ากัน ส่วนโค้งจำนวนเท่ากัน = มุมขนาดเท่ากัน



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

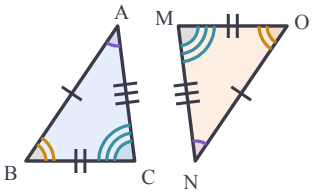
➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

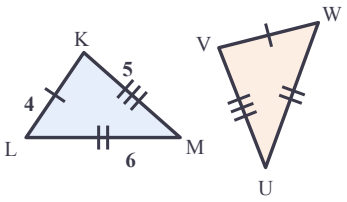
(1) △KLM ≅ △RST ดังนั้น KL = ☐ · LM = ☐ · $\hat{KML}$ = ☐

(2) △DEF ≅ △XYZ ถ้า $\hat{D}$ = 48°, $\hat{E}$ = 62°, $\hat{F}$ = 70° แล้ว $\hat{X}$ = ☐° $\hat{Z}$ = ☐°

(3) จากเครื่องหมายบนรูป △ABC ≅ △☐



(4) △KLM ≅ △☐ และ ☐ = ☐ ซม.



(5) ถ้า AB = YZ, BC = ZX และ CA = XY แล้ว △ABC ≅ △☐

(6) △PQR ≅ △LMN ต้นกล้าบอกว่า “PQ = MN” ต้นกล้าพูดถูกหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 E , F , EF , FD , $\hat{E}$, $\hat{F}$, 6 โจทย์ข้อ 2 Y , Z , X , YZX , YZ

เขียนได้หลายแบบ △ABC ≅ △DEF เขียนเป็น △BCA ≅ △EFD หรือ △CAB ≅ △FDE ก็ได้ ขอให้จุดที่สมนัยกันอยู่ตำแหน่งเดียวกันเสมอ



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 1 รูปที่เท่ากันทุกประการ

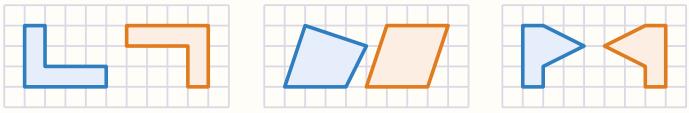
ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน
_____
/ 100



1 10 คะแนน

รูปสีส้มคู่ใดเท่ากันทุกประการกับรูปสีฟ้า และได้จากการแปลงแบบใด

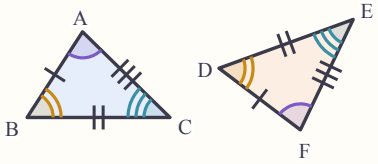


2 10 คะแนน

$\triangle LMN \cong \triangle STU$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันให้ครบทุกคู่

3 10 คะแนน

จากเครื่องหมายบนรูป จงเขียนประโยคแสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้



4 10 คะแนน

$\triangle PQR \cong \triangle KLM$ มี $PQ = 8$ ซม., $QR = 6$ ซม., $\hat{P} = 35°$ และ $\hat{R} = 70°$ จงหา KL, LM, $\hat{K}$ และ $\hat{M}$

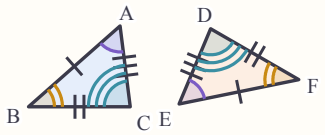
5 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ · **กำหนดให้** $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** $AB = XY$ และ $\hat{C} = \hat{Z}$

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$	
2	$AB = XY$	
3	$\hat{C} = \hat{Z}$	

6 10 คะแนน

ตะวันดูรูปแล้วเขียนว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ตะวันเขียนถูกหรือไม่ ถ้าไม่ถูกให้เขียนใหม่



7 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ · **กำหนดให้** $\triangle PQR \cong \triangle STU$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** $QR = TU$ และ $\hat{P} = \hat{S}$

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	$\triangle PQR \cong \triangle STU$	กำหนดให้
2	☐ = ☐	ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน
3	$\hat{P}$ = ☐	มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการมีขนาดเท่ากัน

8 10 คะแนน

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ โดย $\hat{B} = 90°$, $AB = 5$ ซม., $BC = 12$ ซม., $CA = 13$ ซม. จงหาความยาวรอบรูปและพื้นที่ของ $\triangle DEF$

9 10 คะแนน

ร้านกระจกตัดกระจกรูปสามเหลี่ยม 12 แผ่น ให้เท่ากันทุกประการกับแบบที่มีด้านยาว 30 ซม., 40 ซม. และ 50 ซม. แล้วติดคิ้วอะลูมิเนียมรอบขอบทุกแผ่น ถ้าคิ้วราคาเมตรละ 85 บาท ต้องจ่ายค่าคิ้วกี่บาท

10 10 คะแนน

รูปสี่เหลี่ยม ABCD $\cong$ รูปสี่เหลี่ยม PQRS มี $AB = 7$ ซม., $BC = 4$ ซม., $CD = 5$ ซม., $DA = 6$ ซม., $\hat{B} = 90°$ และ $\hat{C} = 110°$ จงหา QR, $\hat{R}$ และความยาวรอบรูปของ PQRS

ก้าวต่อไปสู่ความสำเร็จ

ต่อไป: ต้องรู้กี่อย่างจึงพอ

รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการมีส่วนที่สมนัยกันเท่ากัน 6 คู่ แต่ไม่ต้องวัดครบทั้ง 6 คู่ บทต่อไปจะพบว่ารู้เพียง 3 อย่างที่เลือกให้ถูก เช่น ด้าน-มุม-ด้าน ก็สรุปได้แล้ว



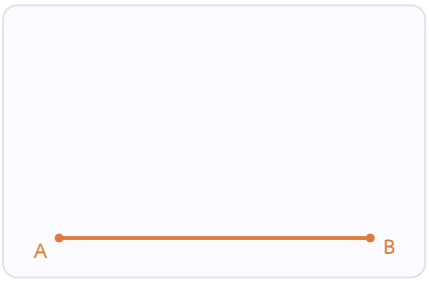
03 ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

ต่อจากเล่มการสร้าง ม.1 (สร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อรู้ด้านสองด้านและมุม) · ไม่ต้องวัดครบ 6 คู่ ลองดูว่ารู้แค่ 3 อย่างพอหรือไม่

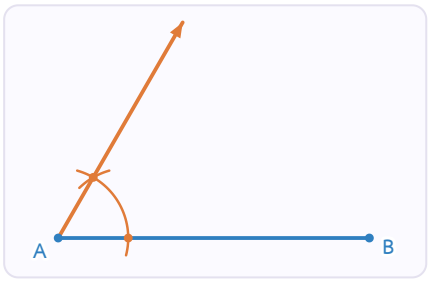
โจทย์ข้อ 1 รู้ด้านสองด้าน และมุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสอง

1. ภูผาและน้ำฝนต่างคนต่างสร้าง $\triangle ABC$ ที่ AB = 8 ซม., $\hat{A} = 60°$ และ AC = 5 ซม. ตามแถบขั้นตอน
2. ทั้งสองคนวัด BC ได้ [ ] ซม. เท่ากัน และนำรูปมาวางทับกันได้ [ ]
3. มุม A อยู่ [ ] ด้าน AB กับด้าน AC · เงื่อนไขนี้เรียกว่า ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

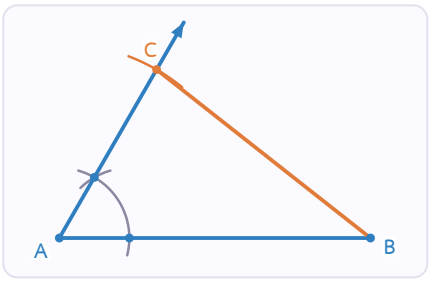
แถบขั้นตอนการสร้าง



1 ลาก AB ยาว [ ] ซม.



2 สร้างมุม A ขนาด [ ]° (ม.1)

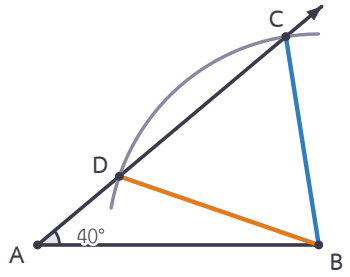


3 วัด AC = [ ] ซม. บนแขนแล้วลาก BC

โจทย์ข้อ 2 ถ้ามุมไม่อยู่ระหว่างด้านทั้งสอง

1. สร้างรูปจาก AB = 6 ซม., $\hat{A} = 40°$ และ BC = 4.5 ซม. (มุม A ไม่อยู่ระหว่าง AB กับ BC)
2. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 4.5 ซม. เขียนส่วนโค้ง ตัดแขนของมุม A ได้ [ ] จุด คือ C และ D
3. ได้ $\triangle ABC$ ที่ AC ≈ [ ] ซม. และ $\triangle ABD$ ที่ AD ≈ [ ] ซม. ซึ่งไม่เท่ากันทุกประการ
4. ด้าน-ด้าน-มุม (ด.ด.ม.) ที่มุมไม่อยู่ระหว่างด้าน [ ] เงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการ

ได้สองรูป



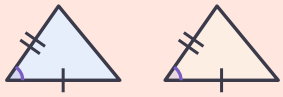
ก้าวขึ้นอีกขั้น

มุมต้องอยู่ระหว่างด้านสองด้านที่รู้

ใน $\triangle PQR$ มุมที่อยู่ระหว่างด้าน PQ กับด้าน QR คือ [ ] ซึ่งจุดยอด Q เป็นจุดที่ด้านทั้งสองพบกัน · มุมที่อยู่ระหว่าง PR กับ QR คือ [ ]



ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และ**มุมที่อยู่ระหว่างด้าน**คู่ที่ยาวเท่ากันนั้นมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



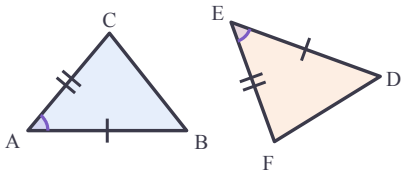
03 04 05 06 07

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

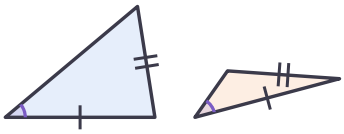
(1) △ABC ≅ △[ ] และ BC = [ ]



(2) สรุปได้หรือไม่ว่าเท่ากันทุกประการ

[ ] เพราะมุมที่เท่ากัน

[ ] ระหว่างด้านสองคู่นั้น



(3) △DEF มี DE = 6 ซม., EF = 10 ซม., $\hat{E}$ = 48° ·
△XYZ มี YZ = 6 ซม., ZX = 10 ซม., $\hat{Z}$ = 48°
ดังนั้น △DEF ≅ △[ ] แบบ [ ]

(4) △ABC มี AB = 5 ซม., BC = 8 ซม., $\hat{A}$ = 70° ·
△PQR มี PQ = 5 ซม., QR = 8 ซม., $\hat{P}$ = 70°
สรุปด้วย ด.ม.ด. [ ] เพราะมุมที่อยู่ระหว่าง AB กับ BC คือ [ ]

(5) รู้ว่า AB = DE และ BC = EF ถ้าจะสรุปว่า △ABC ≅ △DEF แบบ ด.ม.ด. ต้องรู้อีกว่า [ ] = [ ]

(6) ตะวันกับมะลิตัดป้ายไม้รูปสามเหลี่ยมคนละแผ่น ทั้งสองแผ่นมีด้าน 30 ซม. กับ 40 ซม. และมุมระหว่างสองด้านนั้นเป็นมุมฉาก ป้ายสองแผ่นเท่ากันทุกประการหรือไม่ และด้านที่สามยาวเท่าไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 7 , สนิท , ระหว่าง , 8 , 60 , 5 โจทย์ข้อ 2 2 , 6.9 , 2.3 , ไม่ใช่

ระวัง! ด.ด.ม. (มุมไม่อยู่ระหว่างด้าน) **ไม่ใช่**เงื่อนไข: จากโจทย์ข้อ 2 ข้อมูลชุดเดียวสร้างได้สองรูปที่ต่างกัน



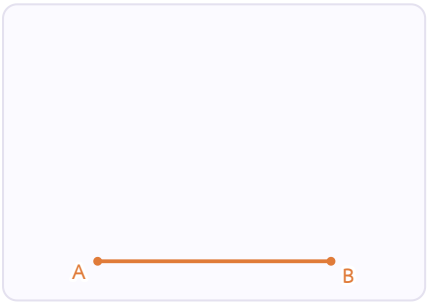
04 มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

ต่อจากบทเรียน 03 · คราวนี้รู้มุมสองมุม และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสอง (ใช้ไม้โปรแทรกเตอร์สร้างมุม)

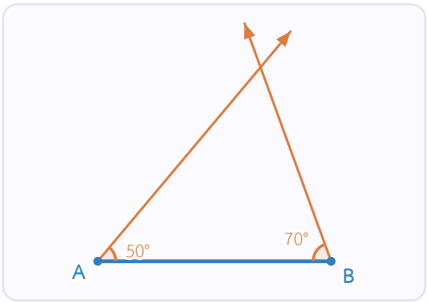
โจทย์ข้อ 1 รู้มุมสองมุม และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสอง

1. สร้าง $\triangle ABC$ ที่ $\hat{A} = 50°$, AB = 6 ซม. และ $\hat{B} = 70°$ ตามแถบขั้นตอน
2. แขนของมุมทั้งสองตัดกันได้จุดเดียว ทุกคนจึงได้จุด C ที่เดียวกัน วัดได้ AC ≈ ____ ซม. และ BC ≈ ____ ซม.
3. รูปของทุกคน ____ · เงื่อนไขนี้เรียกว่า มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

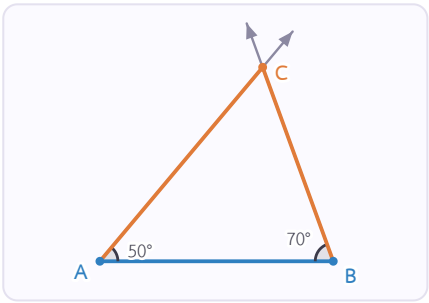
แถบขั้นตอนการสร้าง



1 ลาก AB ยาว ____ ซม.



2 ที่ A สร้างมุม ____° ที่ B สร้างมุม ____° ด้านเดียวกัน

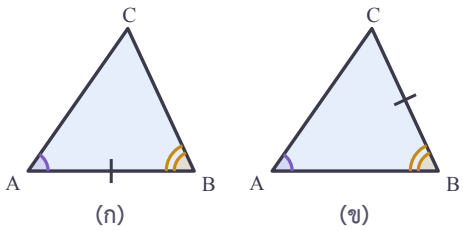


3 แขนทั้งสองตัดกันได้ ____ จุด คือ C

โจทย์ข้อ 2 ด้านที่รู้อยู่ระหว่างมุมทั้งสองหรือไม่

1. (ก) รู้ $\hat{A}$, $\hat{B}$ และ AB · ด้าน AB ____ ระหว่างมุม A กับมุม B จึงใช้ ม.ด.ม. ____
2. (ข) รู้ $\hat{A}$, $\hat{B}$ และ BC · ด้าน BC ____ ระหว่างมุมทั้งสอง จึงใช้ ม.ด.ม. ____ (กรณีนี้มีเงื่อนไข มุม-มุม-ด้าน ที่จะเรียนในเล่มเส้นขนาน)
3. ด้านที่อยู่ระหว่าง $\hat{B}$ กับ $\hat{C}$ คือด้าน ____

ส่วนโค้ง = มุมที่รู้ · ขีด = ด้านที่รู้



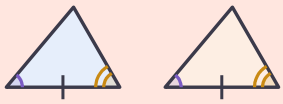
ก้าวขึ้นอีกขั้น

มุม-มุม-มุม ไม่พอ

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ 2 ซม. กับยาวด้านละ 5 ซม. มีมุม 60° ทั้งสามมุมเหมือนกัน แต่ ____ เพราะขนาดต่างกัน · มุม-มุม-มุม (ม.ม.ม.) จึงไม่ใช่เงื่อนไข ต้องรู้ความยาวด้านอย่างน้อยหนึ่งคู่



มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมขนาดเท่ากันสองคู่ และ**ด้านที่อยู่ระหว่างมุม**คู่ที่มีขนาดเท่ากันนั้นยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

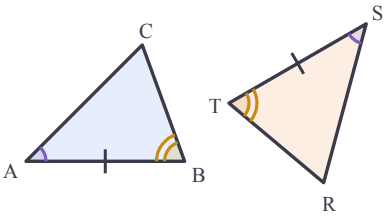


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

(1) $\triangle ABC \cong \triangle$ ☐ และ AC = ☐

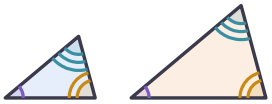


(2) ใน $\triangle PQR$ ด้านที่อยู่ระหว่าง $\hat{P}$ กับ $\hat{R}$ คือ ☐ · ด้าน QR อยู่ระหว่าง ☐ กับ ☐

(3) $\triangle ABC$ มี $\hat{A} = 40°$, AB = 7 ซม., $\hat{B} = 65°$ · $\triangle KLM$ มี $\hat{L} = 65°$, LM = 7 ซม., $\hat{M} = 40°$ ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle$ ☐ แบบ ☐

(4) $\triangle ABC$ มี $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 65°$, BC = 7 ซม. · $\triangle DEF$ มี $\hat{D} = 40°$, $\hat{E} = 65°$, DE = 7 ซม. ใช้ ม.ด.ม. ☐ เพราะ BC คู่กับ ☐ ไม่ใช่ DE

(5) มุมเท่ากันทั้งสามคู่ เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐



(6) ภูผากับข้าวหอมวาดแผนผังที่ดินรูปสามเหลี่ยมคนละแผ่น ด้านที่ติดถนนยาว 20 ม. และมุมที่ปลายทั้งสองของด้านนี้เป็น 60° กับ 75° เหมือนกัน แผนผังสองแผ่นเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 6.5 , 5.3 , เท่ากันทุกประการ , 6 , 50 , 70 , 1 **โจทย์ข้อ 2** อยู่ , ได้ , ไม่อยู่ , ไม่ได้ , BC

ระวัง! ม.ด.ม. ต้องใช้ด้านที่อยู่**ระหว่าง**มุมสองมุมที่รู้ · ส่วนโค้งบอกมุม ขีดบอกด้าน อ่านเครื่องหมายบนรูปให้ครบก่อนตอบ



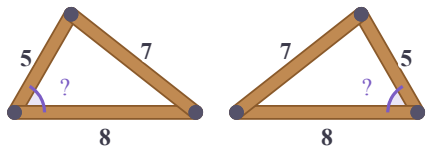
05 ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

ต่อจากบทเรียน 03–04 · ถ้ารู้แค่ความยาวของด้านทั้งสาม ไม่รู้มุมเลย จะสรุปได้หรือไม่ มาลองต่อโครงไม้กัน

โจทย์ข้อ 1 ไม้สามท่อนต่อเป็นรูปสามเหลี่ยม

1. ภูผานำไม้ยาว 5, 7 และ 8 ซม. มาต่อเป็นรูปสามเหลี่ยม น้ำฝนใช้ไม้ชุดเดียวกันแต่วางกลับด้าน
2. ลองโยกมุมของโครงไม้: รูปสามเหลี่ยม ☐ รูปร่างคงที่
3. วัดมุมระหว่างไม้ 5 ซม. กับ 8 ซม. ได้ ☐° ทั้งสองโครงวางทับกันได้สนิท
4. ด้านยาวเท่ากันสามคู่ก็พอ เรียกว่า ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)
5. ลองอีกข้อ: ไม้ยาว 6 ซม. สามท่อน ไม่ว่าใครต่อ ก็ได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีมุมละ ☐° เหมือนกันทุกรูป

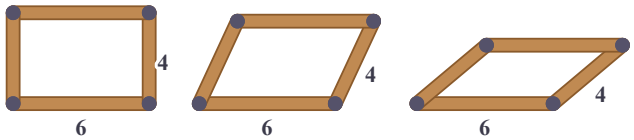
โครงไม้สามท่อน



โจทย์ข้อ 2 ไม้สี่ท่อนต่อเป็นรูปสี่เหลี่ยม

1. ไม้ยาว 6, 4, 6, 4 ซม. ต่อเป็นรูปสี่เหลี่ยม แล้วโยกได้ทั้งสามรูปในภาพ
2. ทุกรูปมีด้านยาวเท่ากันทุกคู่ แต่มุม ☐ จึง ☐
3. ถ้าตอกไม้ค้ำตามแนวเส้นทแยงมุม โครงจะกลายเป็นรูปสามเหลี่ยม ☐ รูป และโยก ☐

โครงไม้สี่ท่อนที่โยกได้



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ทำไมโครงสร้างจึงใช้รูปสามเหลี่ยม

โครงหลังคาบ้าน โครงสะพานเหล็ก และเสาไฟฟ้าแรงสูง ใช้ไม้หรือเหล็กค้ำยันเป็นรูปสามเหลี่ยม เพราะรูปสามเหลี่ยมที่ด้านยาวคงที่เปลี่ยนรูปร่าง ☐ (ด.ด.ด.) โครงจึงแข็งแรง ไม่โยกเมื่อมีแรงมากระทำ



ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.) ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากัน**เป็นคู่ ๆ ทั้งสามคู่** แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ไม่ต้องรู้มุมเลย)

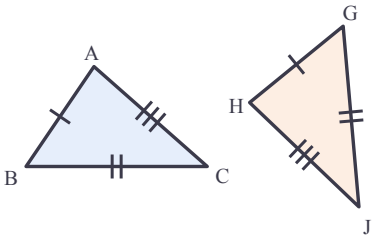


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

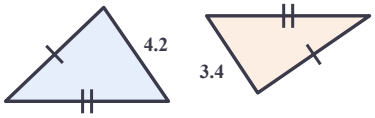
(1) △ABC ≅ △[ ] แบบ [ ]



(2) △ABC มี AB = 4 ซม., BC = 6 ซม., CA = 7 ซม. · △PQR มี PQ = 6 ซม., QR = 7 ซม., RP = 4 ซม. ดังนั้น △ABC ≅ △[ ]

(3) ไม้ 3 ท่อนยาว 3 ซม., 5 ซม. และ 9 ซม. ต่อเป็นรูปสามเหลี่ยม[ ] เพราะ 3 + 5 = [ ] ซึ่ง[ ] 9

(4) ด้านที่สามยาวไม่เท่ากัน เท่ากันทุกประการหรือไม่ [ ]



(5) ช่างเชื่อมทำโครงเหล็กรูปสามเหลี่ยม 4 โครง แต่ละโครงใช้เหล็กยาว 0.8 ม., 1.5 ม. และ 1.7 ม. ต้องใช้เหล็กรวมกี่เมตร และโครงทั้ง 4 โครง เท่ากันทุกประการหรือไม่

(6) รูปสี่เหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวด้านละ 5 ซม. ทั้งสี่ด้านเหมือนกัน ต้องเท่ากันทุกประการเสมอหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 โยกไม่ได้ , 60 , 60 **โจทย์ข้อ 2** ต่างกัน , ไม่เท่ากันทุกประการ , 2 , ไม่ได้

ข้อสอบชอบถาม

ไม้สามท่อนต่อเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ เมื่อสองท่อนที่สั้นกว่ารวมกันยาวกว่าท่อนที่ยาวที่สุด เช่น 4, 5, 8 ได้ (4 + 5 = 9 มากกว่า 8) แต่ 3, 5, 9 ไม่ได้



06 ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

ต่อจากเล่มทฤษฎีบทพีทาโกรัส (เล่ม 1) · สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รู้ด้านเพียงสองด้านก็หาด้านที่สามได้ จึงมีเงื่อนไขพิเศษ

โจทย์ข้อ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่รู้ด้านสองด้าน

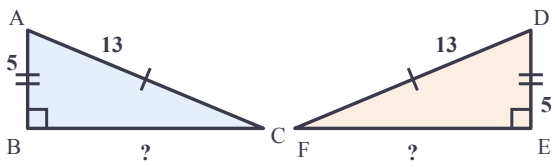
1 $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{B} = \hat{E} =$ ☐° · AC = DF = 13 ซม. และ AB = DE = 5 ซม.

2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส: $BC^2 = 13^2 - 5^2 =$ ☐ ได้ BC = ☐ ซม. และ EF ก็ยาว ☐ ซม.

3 ด้านยาวเท่ากันครบสามคู่ จึงเท่ากันทุกประการแบบ ☐

4 สรุป: มุมฉาก + ด้านตรงข้ามมุมฉาก + ด้านประกอบมุมฉากอีกหนึ่งคู่ ก็พอ เรียกว่า ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

วางกลับทิศ



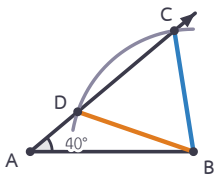
โจทย์ข้อ 2 ด.ด.ม. ทั่วไปไม่พอ แต่ถ้ามุมนั้นเป็นมุมฉากพอ

1 (ก) บทเรียน 03: ส่วนโค้งตัดแขนของมุม 40° ได้ ☐ จุด จึงได้สองรูปที่ต่างกัน

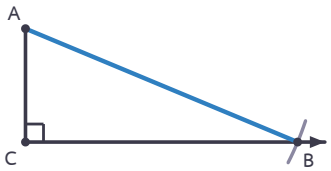
2 (ข) ที่มุมฉาก C ส่วนโค้งรัศมี 13 ซม. จาก A ตัดแขน CB ได้ ☐ จุด จึงได้รูปเดียว

3 ด้าน-ด้าน-มุม ทั่วไป ☐ แต่ถ้ามุมนั้นเป็นมุมฉาก และด้านที่รู้คือด้านตรงข้ามมุมฉาก ☐

เขียนส่วนโค้งตัดแขนของมุม



(ก) มุม A = 40°



(ข) มุม C = 90°

ก้าวขึ้นอีกขั้น

ด้านที่รู้ต้องเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

ฉ.ด.ด. ต้องมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันหนึ่งคู่ · ถ้ารูปหนึ่งมี 13 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก แต่อีกรูปมี 13 เป็นด้านประกอบมุมฉาก ด้าน 13 สองเส้นนั้น ☐ ด้านคู่ที่สมนัยกัน · ถ้ารู้ด้านประกอบมุมฉากสองคู่ ใช้ ด.ม.ด. ได้เลย (มุมฉากอยู่ระหว่าง)



ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.) ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมี**ด้านตรงข้ามมุมฉาก**ยาวเท่ากัน และ**ด้านประกอบมุมฉาก**ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

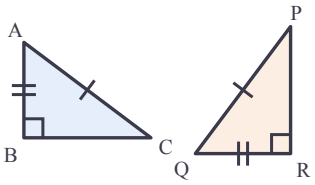


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

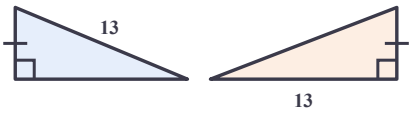
เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

(1) $\triangle ABC \cong \triangle$ ☐ แบบ ☐

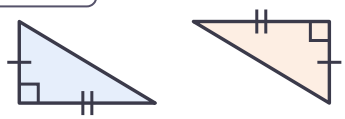


(2) $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{B} = \hat{E} = 90°$, AC = DF = 10 ซม., AB = DE = 6 ซม. ดังนั้น BC = EF = ☐ ซม. และ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ แบบ ☐

(3) รูปซ้าย 13 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก รูปขวา 13 เป็นด้านประกอบมุมฉาก เท่ากันทุกประการหรือไม่ ☐



(4) รู้มุมฉากกับด้านประกอบมุมฉากสองคู่ ใช้เงื่อนไข ☐



(5) บันไดสองอันยาว 1.7 ม. เท่ากัน พิงผนังที่ตั้งฉากกับพื้น เท้าบันไดทั้งสองห่างจากผนัง 0.8 ม. ปลายบันไดทั้งสองแตะผนังที่ความสูงเท่ากันหรือไม่ เพราะอะไร และสูงเท่าไร

(6) เสาธงตั้งฉากกับพื้น มีลวดยึดเสาสองเส้นยาว 5 ม. เท่ากัน ผูกที่จุดเดียวกันบนเสา ปลายลวดทั้งสองห่างจากโคนเสาเท่ากันหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 90 , 144 , 12 , 12 , ด.ด.ด. โจทย์ข้อ 2 2 , 1 , ไม่พอ , พอ

ใช้เมื่อมีมุมฉาก ฉ.ด.ด. ต้องมีมุมฉากทั้งสองรูป ถ้าไม่มีมุมฉาก ข้อมูลแบบ ด้าน-ด้าน-มุม ยังสรุปไม่ได้



07 เลือกเงื่อนไขให้ถูก

ทบทวนบทเรียน 03–06 · ดูเครื่องหมายบนรูปให้ครบ ขีดบอกด้านที่ยาวเท่ากัน ส่วนโค้งบอกมุมที่เท่ากัน สี่เหลี่ยมเล็กบอกมุมฉาก

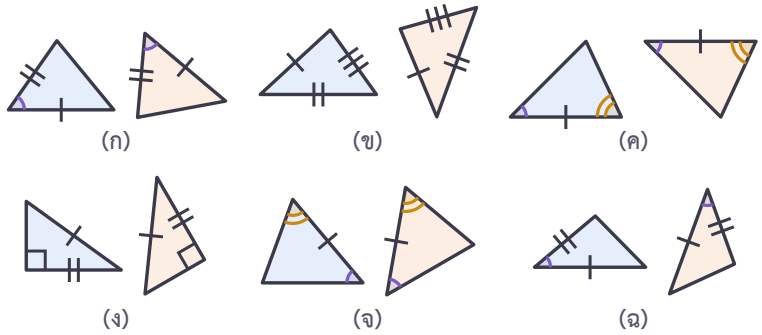
โจทย์ข้อ 1 ดูเครื่องหมายบนรูป แล้วบอกเงื่อนไข

1 นับว่ารู้ด้านกี่คู่ มุมกี่คู่ แล้วดูว่ามุมอยู่ระหว่างด้าน หรือด้านอยู่ระหว่างมุม

2 (ก) _____ (ข) _____ (ค) _____

3 (ง) _____ (จ) _____ (ฉ) _____

รูปคู่ 6 คู่



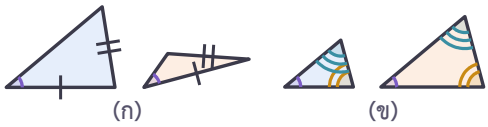
โจทย์ข้อ 2 ข้อมูลไม่พอ: สรุปไม่ได้

1 (ก) รู้ด้าน 2 คู่กับมุม 1 คู่ แต่มุม _____ ระหว่างด้าน (ด.ด.ม.) ที่จริงสองรูปนี้ต่างกัน

2 (ข) รู้มุมครบ 3 คู่ แต่ไม่รู้ด้านเลย (ม.ม.ม.) รูปใหญ่กับรูปเล็กจึง _____

3 ถ้าใน (ข) รู้เพิ่มว่าด้านที่อยู่ระหว่างมุมสองคู่ยาวเท่ากัน จะใช้เงื่อนไข _____ ได้

สรุปไม่ได้



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ข้อมูลที่ “ซ่อน” อยู่ในรูป

บางรูปไม่ได้เขียนเครื่องหมายครบ แต่มีข้อมูลซ่อนอยู่ เช่น ด้านที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปใช้ร่วมกัน (ด้านร่วม) ยาวเท่ากับตัวเอง และมุมตรงข้ามมุมยอดมีขนาด _____ · บทเรียนถัดไปจะใช้ข้อมูลเหล่านี้



เลือกเงื่อนไขจากสิ่งที่รู้ (นับให้ครบ 3 อย่าง และดูตำแหน่ง)

เงื่อนไข	ต้องรู้
ด.ม.ด.	ด้าน 2 คู่ + มุมที่อยู่ระหว่าง
ม.ด.ม.	มุม 2 คู่ + ด้านที่อยู่ระหว่าง
ด.ด.ด.	ด้าน 3 คู่
ฉ.ด.ด.	มุมฉาก + ด้านตรงข้ามมุมฉาก + ด้านอีก 1 คู่

ด.ด.ม. และ ม.ม.ม. **ไม่ใช่**เงื่อนไข



03 04 05 06 07

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เขียนเงื่อนไข (ด.ม.ด., ม.ด.ม., ด.ด.ด., ฉ.ด.ด.) หรือ “สรุปไม่ได้” ลงในช่อง (ข้อ (1)–(6) เป็นข้อมูลของ $\triangle ABC$ กับ $\triangle DEF$)

(1) $AB = DE, BC = EF, CA = FD$

เงื่อนไข ☐

(2) $AB = DE, \hat{B} = \hat{E}, BC = EF$

เงื่อนไข ☐

(3) $\hat{A} = \hat{D}, AB = DE, \hat{B} = \hat{E}$

เงื่อนไข ☐

(4) $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$

เงื่อนไข ☐

(5) $\hat{C} = \hat{F} = 90°, AB = DE, AC = DF$

เงื่อนไข ☐

(6) $AB = DE, BC = EF, \hat{A} = \hat{D}$

เงื่อนไข ☐

(7) $AB = EF, \hat{B} = \hat{F}, BC = FD$

$\triangle ABC \cong \triangle$ ☐ แบบ ☐

(8) ใบบัวสรุปว่า $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ แบบ ด.ม.ด. เพราะ $PQ = XY$, $QR = YZ$ และ $\hat{P} = \hat{X}$ ใบบัวถูกหรือไม่

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 ด.ม.ด. , ด.ด.ด. , ม.ด.ม. , ฉ.ด.ด. , ม.ด.ม. , ด.ม.ด.

โจทย์ข้อ 2 ไม่อยู่ , ไม่เท่ากันทุกประการ , ม.ด.ม.

ระวัง! ม.ม.ด. (มุมสองมุมกับด้านที่ไม่อยู่ระหว่างมุม) เป็นเงื่อนไขจริง แต่ต้องใช้สมบัติผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม จะได้เรียนในเล่มเส้นขนาน เล่มนี้จึงยังไม่ใช้



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 2 เงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการ

คะแนน

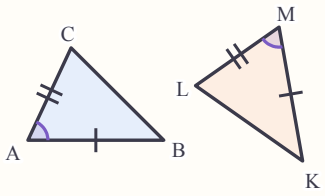
/ 100



ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

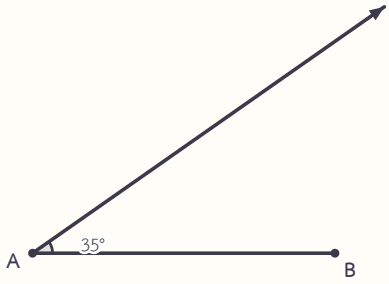
1 10 คะแนน

จากเครื่องหมายบนรูป จงเขียนประโยคแสดงความเท่ากันทุกประการ และบอกเงื่อนไขที่ใช้



2 10 คะแนน

AB = 4 ซม. และ $\hat{A}$ = 35° ให้ไว้แล้ว จงหาจุด C บนแขนของมุม A ที่ทำให้ BC = 2.8 ซม. สร้างรูปสามเหลี่ยมได้กี่รูป ข้อมูลแบบนี้เป็นเงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการหรือไม่

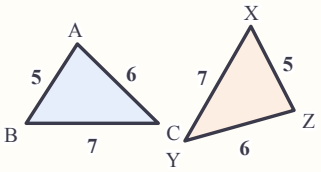


3 10 คะแนน

△ABC มี $\hat{B}$ = 70°, BC = 8 ซม., $\hat{C}$ = 45°, AB = 6 ซม. · △PQR มี $\hat{Q}$ = 70°, QP = 8 ซม., $\hat{P}$ = 45° จงเขียนประโยค ≅ บอกเงื่อนไข และหา QR

4 10 คะแนน

จงเขียนประโยคแสดงความเท่ากันทุกประการ และบอกเงื่อนไขที่ใช้ (หน่วยเป็นเซนติเมตร)



5 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ · **กำหนดให้** AB = DE, $\hat{B}$ = $\hat{E}$ และ BC = EF **ต้องการพิสูจน์ว่า** AC = DF

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	AB = DE, $\hat{B}$ = $\hat{E}$, BC = EF	กำหนดให้
2	△ABC ≅ △ ☐	☐
3	AC = DF	☐

6 10 คะแนน

$\triangle$KLM และ $\triangle$RST มี $\hat{L} = \hat{S} = 90°$, KM = RT = 25 ซม. และ KL = RS = 7 ซม. รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการหรือไม่ ใช้เงื่อนไขใด และ LM ยาวเท่าไร

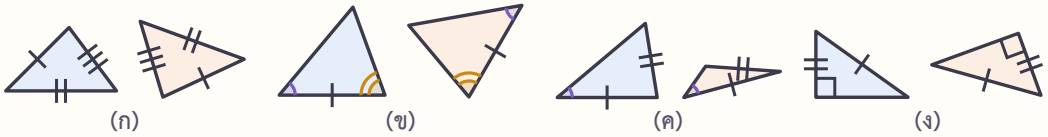
7 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ · **กำหนดให้** $\hat{B} = \hat{E} = 90°$, AC = DF และ AB = DE **ต้องการพิสูจน์ว่า** $\hat{A} = \hat{D}$

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	$\hat{B} = \hat{E} = 90°$, AC = DF, AB = DE	
2	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$DEF	
3	=	

8 10 คะแนน

แต่ละคู่ใช้เงื่อนไขใด (ถ้าสรุปไม่ได้ให้ตอบว่า สรุปไม่ได้)



9 10 คะแนน

ข้าวหอมวัดมุมของแผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยมสองแผ่น ได้ 50°, 60° และ 70° เท่ากันทั้งสองแผ่น จึงสรุปว่าป้ายสองแผ่นเท่ากันทุกประการ ข้าวหอมสรุปถูกหรือไม่ ถ้าไม่ถูก ต้องวัดอะไรเพิ่ม

10 10 คะแนน

เวทีสูง 1 ม. มีทางลาดสองข้าง ทางลาดแต่ละข้างยาว 2.6 ม. และตั้งฉากกับผนังเวทีที่พื้น ทางลาดสองข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่ และระยะตามพื้นของทางลาดทั้งสองข้างรวมกันกี่เมตร

ก้าวขึ้นอีกขั้น

ต่อไป: ข้อมูลที่ซ่อนอยู่ในรูป

รู้ 3 อย่างที่เลือกถูกก็สรุปได้ บทต่อไปจะหาข้อมูลจากรูปเอง เช่น ด้านร่วม และมุมตรงข้ามมุมยอด แล้วใช้ความเท่ากันทุกประการหาความยาวที่วัดตรง ๆ ไม่ได้

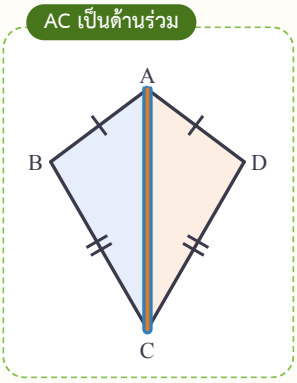


08 ข้อมูลที่ซ่อนในรูป

ต่อจากบทเรียน 07 · บางครั้งโจทย์บอกส่วนที่เท่ากันแค่ 2 คู่ อีกคู่หนึ่งซ่อนอยู่ในรูป ต้องมองหาเอง เส้นที่ระบายสองชั้น (ฟ้าและส้ม) คือด้านที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปใช้ร่วมกัน

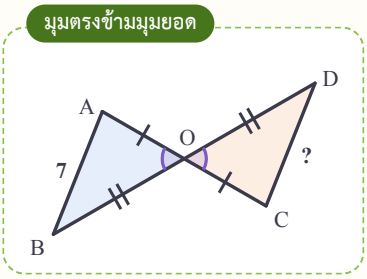
โจทย์ข้อ 1 รูปว่าว: ด้านร่วม

1. ว่าว ABCD มี AB = AD (1 ขีด) และ CB = CD (2 ขีด)
2. AC เป็นด้านของทั้ง △ABC และ △ADC เรียกว่า [ ] จึงได้ AC = AC
3. ด้านยาวเท่ากันครบสามคู่ △ABC ≅ △[ ] แบบ [ ]
4. ดังนั้น $A\hat{B}C$ = [ ] เพราะเป็นมุมคู่ที่สมนัยกัน
5. ลองอีกข้อ: ถ้า $B\hat{A}C = 35°$ แล้ว $D\hat{A}C$ = [ ]° และ $B\hat{C}A$ = [ ]



โจทย์ข้อ 2 ส่วนของเส้นตรงตัดกัน: มุมตรงข้ามมุมยอด

1. AC กับ BD ตัดกันที่ O โดย OA = OC = 5 ซม. และ OB = OD = 8 ซม.
2. $A\hat{O}B$ กับ $C\hat{O}D$ เป็นมุมตรงข้ามมุมยอด จึงมีขนาด [ ]
3. △AOB ≅ △[ ] แบบ [ ]
4. วัด AB ได้ 7 ซม. ดังนั้น CD ยาว [ ] ซม. (ด้านคู่ที่สมนัยกัน)
5. ลองอีกข้อ: ถ้า $O\hat{A}B = 40°$ แล้ว $O\hat{C}D$ = [ ]° เพราะ A คู่กับ [ ]



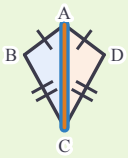
ก้าวขึ้นอีกขั้น

เท่ากันทุกประการแล้วได้อะไรเพิ่ม

เมื่อสรุปได้ว่า △ABC ≅ △ADC ด้านและมุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลือทั้งหมดเท่ากันด้วย เช่น $B\hat{A}C$ = [ ] ช่างจึงใช้ความเท่ากันทุกประการหาความยาวหรือมุมที่วัดตรง ๆ ไม่ได้ (บทเรียน 10)



ข้อมูลที่ซ่อนในรูป · **ด้านร่วม** ยาวเท่ากับตัวเอง · **มุมร่วม** มีขนาดเท่ากับตัวเอง · **มุมตรงข้ามมุมยอด**มีขนาดเท่ากัน · เมื่อสรุปว่าเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน



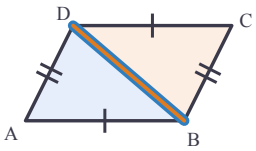
แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

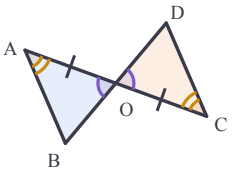
เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

(1) $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ แบบ [ ]

ข้อมูลที่ซ่อนคือ BD เป็น [ ]

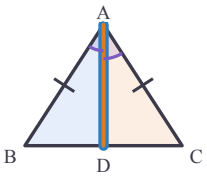


(2) $\triangle AOB \cong \triangle$ [ ] แบบ [ ] ข้อมูลที่ซ่อนคือ [ ]



(3) AB = AC และ AD แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ แบบ [ ] จึง BD = [ ]



(4) AB = AC = 3 ซม. และ AD = AE = 7 ซม. โดย B อยู่บน AD และ C อยู่บน AE ดังนั้น

$\triangle ABE \cong \triangle ACD$ แบบ [ ]

เพราะ $B\hat{A}E$ เป็น [ ]

(5) ว่าว ABCD (รูปในโจทย์ข้อ 1) ถ้า $A\hat{B}C = 110°$ แล้ว $A\hat{D}C$ = [ ]°

(6) ต้นกล้าบอกว่า “ในรูปว่าว ABCD รู้ว่าด้านยาวเท่ากันแค่ 2 คู่ จึงสรุปไม่ได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle ADC$” ต้นกล้าพูดถูกหรือไม่

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 ด้านร่วม , ADC , ด.ด.ด. , $A\hat{D}C$, 35 , $D\hat{C}A$ โจทย์ข้อ 2 เท่ากัน , COD , ด.ม.ด. , 7 , 40 , C

มุมร่วม รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่ซ้อนกันอาจใช้มุมเดียวกัน เช่น ข้อ (4) $\triangle ABE$ กับ $\triangle ACD$ ใช้มุม A ร่วมกัน จึงเขียนเหตุผลว่า “เป็นมุมร่วม”



09 หาความยาว ขนาดของมุม และเขียนเหตุผล

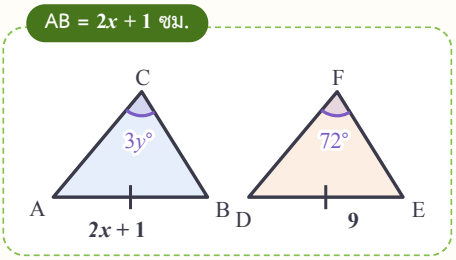
ใช้ “ด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน มุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน” สร้างสมการ (เล่มสมการ ม.1) และเขียนเหตุผลเป็นตารางสองช่อง

โจทย์ข้อ 1 ตั้งสมการจากส่วนที่สมนัยกัน

1 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ · AB กับ DE เป็นด้านคู่ที่สมนัยกัน จึงได้ $2x + 1 =$ ☐

2 $2x =$ ☐ ได้ $x =$ ☐ และ AB ยาว ☐ ซม.

3 $\hat{C}$ กับ $\hat{F}$ เป็นมุมคู่ที่สมนัยกัน: $3y =$ ☐ ได้ $y =$ ☐

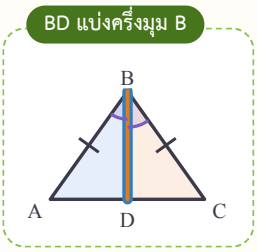


โจทย์ข้อ 2 เขียนเหตุผลในตารางพิสูจน์

1 อ่าน “กำหนดให้” กับ “ต้องการพิสูจน์ว่า” แล้วเติมช่องว่างในตาราง ทีละบรรทัด

เหตุผลที่ใช้บ่อย: กำหนดให้ · เป็นด้านร่วม · มุมตรงข้ามมุมยอดมีขนาดเท่ากัน · ด.ม.ด. ม.ด.ม. ด.ด.ด. ฉ.ด.ด. · ด้าน (หรือมุม) คู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ...

2 **กำหนดให้** AB = CB และ $\hat{ABD} = \hat{CBD}$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** AD = CD



	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	AB = CB	กำหนดให้
2	$\hat{ABD} = \hat{CBD}$	☐
3	BD = BD	☐
4	$\triangle ABD \cong \triangle$ ☐	☐
5	AD = ☐	☐

ก้าวขึ้นอีกขั้น

การพิสูจน์คือการเขียนเหตุผลทีละขั้น

ทุกบรรทัดในตารางต้องมีเหตุผลกำกับ (สิ่งที่กำหนดให้ ด้านร่วม เงื่อนไข หรือส่วนที่สมนัยกัน) เล่มการให้เหตุผลทางเรขาคณิตจะใช้ตารางแบบนี้พิสูจน์สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสี่เหลี่ยม



ด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน → **ตั้งสมการ** แล้วแก้หาตัวแปร · การพิสูจน์เขียนเป็นตาราง **ข้อความ** | **เหตุผล**: ส่วนที่เท่ากัน 3 อย่าง → เงื่อนไข → ส่วนที่สมนัยกันที่ต้องการ



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

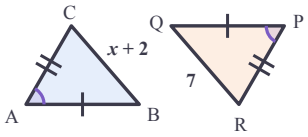
เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ ข้อ (5) เติมช่องในตาราง

(1) $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ ถ้า $PQ = 3x - 2$ ซม. และ $XY = 13$ ซม. แล้ว $x =$ ☐

(2) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ถ้า $\hat{B} = (2y + 10)^\circ$ และ $\hat{E} = 70^\circ$ แล้ว $y =$ ☐

(3) $\triangle KLM \cong \triangle RST$ ถ้า $KL = x + 4$ ซม. และ $RS = 2x - 1$ ซม. จงหา x และ KL

(4) จากรูป BC ยาว $x + 2$ ซม. และ QR ยาว 7 ซม. จงหา x



(5) เติมตารางให้สมบูรณ์ (ว่าว ABCD)

กำหนดให้ $AB = AD$ และ $CB = CD$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	$AB = AD, CB = CD$	กำหนดให้
2	$AC = AC$	
3	$\triangle ABC \cong \triangle ADC$	
4	$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	

(6) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ถ้า $\hat{A} = (x + 15)^\circ$ และ $\hat{P} = 2x^\circ$ แล้ว $x =$ ☐ และ $\hat{A} =$ ☐ $^\circ$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 9 , 8 , 4 , 9 , 72 , 24

โจทย์ข้อ 2 กำหนดให้ , เป็นด้านร่วม , CBD , ด.ม.ด. , CD , ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการยาวเท่ากัน

ระวัง! ตั้งสมการจาก**ด้านคู่ที่สมนัยกัน**เท่านั้น ถ้า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ด้าน AB คู่กับ DE ไม่ใช่ EF



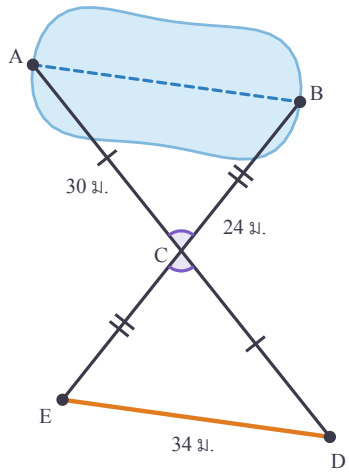
10 ความเท่ากันทุกประการในชีวิตจริง

ต่อจากบทเรียน 08–09 · ระยะที่วัดตรง ๆ ไม่ได้ (ข้ามสระ ข้ามแม่น้ำ) หาได้จากรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ซึ่งสร้างไว้บนพื้นที่วัดได้

โจทย์ข้อ 1 วัดระยะข้ามสระน้ำ (ด.ม.ด.)

1. ปักหลักที่ C วัด AC = 30 ม. แล้วเดินต่อแนว AC ไปอีก ☐ ม. ปักหลัก D
2. วัด BC = 24 ม. แล้วต่อแนว BC ไปอีก ☐ ม. ปักหลัก E
3. $A\hat{C}B$ กับ $D\hat{C}E$ เป็นมุมตรงข้ามมุมยอด จึง $\triangle ACB \cong \triangle DCE$ แบบ ☐
4. วัด DE ได้ 34 ม. ดังนั้นสระกว้าง AB = ☐ ม.

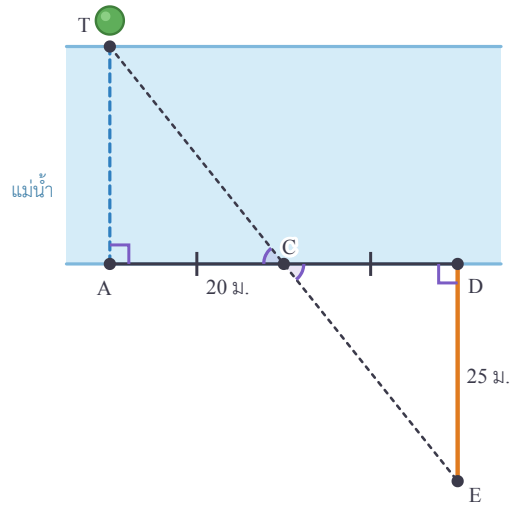
แผนผังมองจากด้านบน



โจทย์ข้อ 2 วัดความกว้างแม่น้ำจากฝั่งเดียว (ม.ด.ม.)

1. ยืนที่ A ตรงข้ามต้นไม้ T (AT ตั้งฉากกับฝั่ง) เดินตามริมฝั่ง 20 ม. ถึง C แล้วเดินต่ออีก ☐ ม. ถึง D
2. ที่ D เดินตั้งฉากกับฝั่งออกจากแม่น้ำ จนเห็น C กับต้นไม้ T อยู่ในแนวเดียวกันที่จุด E
3. $\triangle TAC \cong \triangle EDC$ แบบ ☐ (มุมฉาก, AC = DC, มุมตรงข้ามมุมยอด)
4. วัด DE ได้ 25 ม. แม่น้ำกว้าง AT = ☐ ม.

แผนผังมองจากด้านบน



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ช่างตรวจวงกบประตู

ช่างตรวจว่าวงกบประตูเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่ โดยวัดเส้นทแยงมุมสองเส้น ถ้าด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและเส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากเส้นทแยงมุมจะเท่ากันทุกประการแบบ ☐ มุมของวงกบจึงเท่ากันทุกมุม



ระยะที่วัดไม่ได้ → **สร้างรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ**บนพื้นที่วัดได้ (ใช้มุมตรงข้ามมุมยอด มุมฉาก หรือด้านร่วม) → วัดด้านคู่ที่สมนัยกันแทน · เขียนคำตอบเป็นประโยคพร้อมหน่วย



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

เติมคำตอบในช่อง ข้อที่มีเส้นบรรทัดให้แสดงวิธีทำ

(1) วัดระยะข้ามสระแบบโจทย์ข้อ 1 ได้ CD = AC = 18 ม., CE = BC = 15 ม. และ DE = 21 ม. ดังนั้น AB = ☐ ม.

(2) วัดความกว้างแม่น้ำแบบโจทย์ข้อ 2 ได้ AC = CD = 15 ม. และ DE = 32 ม. แม่น้ำกว้าง ☐ ม. ใช้เงื่อนไข ☐

(3) เสาเต็นท์ PQ ตั้งฉากกับพื้นที่ Q เชือกขึงเต็นท์ PA = PB = 2.5 ม. ถ้า QA = 1.5 ม. แล้ว QB = ☐ ม. เพราะ $\triangle PQA \cong \triangle PQB$ แบบ ☐

(4) หน้าจั่วหลังคาศาลาเป็นรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ AB = AC = 5 ม. และ BC = 8 ม. เสาค้ำ AD ตั้งฉากกับ BC ที่ D จงบอกว่า D อยู่ที่ใดบน BC และหาความสูง AD

(5) มะลิวัดระยะข้ามสระแบบโจทย์ข้อ 1 แต่ต่อ AC ไปได้ CD = AC แล้วต่อ BC ไปเพียง CE = 20 ม. ขณะที่ BC = 24 ม. ระยะ DE ที่วัดได้เท่ากับ AB หรือไม่ เพราะอะไร

(6) ช่างทำกรอบรูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันทั้งสองคู่ แล้ววัดเส้นทแยงมุมได้ 1.20 ม. กับ 1.25 ม. กรอบนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือไม่

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 30 , 24 , ด.ม.ด. , 34 โจทย์ข้อ 2 20 , ม.ด.ม. , 25

ทำไมวิธีนี้จึงใช้ได้ วิธีวัดระยะแบบนี้ใช้กันมาตั้งแต่สมัยโบราณ เพราะต้องใช้แค่เชือกวัดระยะกับหลักไม้ ไม่ต้องข้ามสระหรือข้ามแม่น้ำเลย



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 3 การนำไปใช้

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

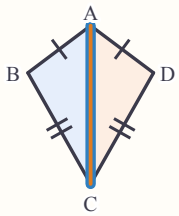
_____

/ 100



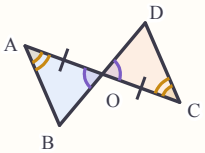
1 10 คะแนน

ว่าว ABCD มีเครื่องหมายตามรูป จงเขียนประโยคแสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป บอกเงื่อนไข และบอกข้อมูลที่ซ่อนอยู่ในรูป



2 10 คะแนน

AC กับ BD ตัดกันที่ O โดย OA = OC และ $O\hat{A}B = O\hat{C}D$ ถ้า AB = 4.5 ซม. จงหา CD และบอกเงื่อนไขที่ใช้



3 10 คะแนน

B อยู่บน AD และ C อยู่บน AE โดย AB = AC = 4 ซม. และ AD = AE = 9 ซม. ถ้า BE = 8.2 ซม. จงหา CD พร้อมเหตุผล

4 10 คะแนน

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ถ้า AB = $3x + 1$ ซม., PQ = 16 ซม. และ BC = $x + 7$ ซม. จงหา x และ QR

5 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ (D อยู่บน BC) · **กำหนดให้** AB = AC และ AD แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** BD = CD

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	AB = AC, $B\hat{A}D = C\hat{A}D$	กำหนดให้
2	AD = AD	
3	$\triangle ABD \cong \triangle$	
4	BD = CD	

6 10 คะแนน

เติมตารางให้สมบูรณ์ (AC กับ BD ตัดกันที่ O) · **กำหนดให้** OA = OC และ $O\hat{A}B = O\hat{C}D$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** AB = CD

	พิสูจน์ (ข้อความ)	เหตุผล
1	OA = OC, $O\hat{A}B = O\hat{C}D$	กำหนดให้
2	$A\hat{O}B$ = ☐	☐
3	△AOB ≅ △COD	☐
4	AB = CD	☐

7 10 คะแนน

△KLM ≅ △XYZ ถ้า $\hat{K} = (4y - 10)°$ และ $\hat{X} = 70°$ จงหา y และถ้า $\hat{L} = 50°$ จงหา $\hat{Y}$

8 10 คะแนน

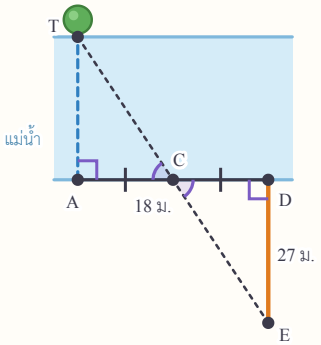
(ทบทวนบทที่ 2) ข้อมูลของ △ABC กับ △PQR แต่ละข้อใช้เงื่อนไขใด หรือสรุปไม่ได้ (ก) AB = PQ, BC = QR, CA = RP (ข) $\hat{A} = \hat{P}$, AB = PQ, $\hat{B} = \hat{Q}$ (ค) AB = PQ, BC = QR, $\hat{C} = \hat{R}$

9 10 คะแนน

(ทบทวนบทที่ 1) น้ำฝนตัดผ้า 8 ผืนให้เท่ากันทุกประการกับ △ABC ที่มี $\hat{B} = 90°$, AB = 30 ซม., BC = 40 ซม. และ CA = 50 ซม. แล้วเย็บลูกไม้รอบขอบทุกผืน ผ้ารวมมีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร และใช้ลูกไม้กี่เมตร

10 10 คะแนน

ภูผาวัดความกว้างแม่น้ำตามแผนผัง (AC = CD = 18 ม. มุมที่ A และ D เป็นมุมฉาก T, C, E อยู่ในแนวเดียวกัน) วัด DE ได้ 27 ม. แม่น้ำกว้างกี่เมตร ใช้เงื่อนไขใด



ก้าวต่อไปเร็วๆ นี้

ต่อไป: เส้นขนาน

เล่มถัดไปจะใช้มุมที่เกิดจากเส้นขนาน และผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม แล้วได้เงื่อนไขที่ห้า มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.) ตารางพิสูจน์แบบเดียวกับเล่มนี้จะใช้ต่อไปทุกเล่ม



เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

01 ความเท่ากันทุกประการ

(1) ใช่ , เลื่อนขนาน (2) ไม่ใช่ , ต่างกัน (3) ใช่ , สะท้อน (4) ใช่ , หมุน (5) 6 , ไม่ใช่

(6) ไม่ถูก เพราะวางทับกันไม่สนิท (รูปร่างต่างกัน)

02 ส่วนที่สมนัยกัน

(1) RS , ST , $\hat{RTS}$ (2) 48 , 70 (3) NOM (4) VWU , WU , 6 (5) YZX (6) ไม่ถูก PQ = LM

03 ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

(1) EDF , DF (2) ไม่ได้ , ไม่อยู่ (3) YZX , ด.ม.ด. (4) ไม่ได้ , $\hat{B}$ (5) $\hat{B}$, $\hat{E}$

(6) เท่ากันทุกประการ (ด.ม.ด.) · ด้านที่สามยาว 50 ซม.

04 มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

(1) STR , SR (2) PR , $\hat{Q}$, $\hat{R}$ (3) MLK , ม.ด.ม. (4) ไม่ได้ , EF (5) ไม่ใช่ (6) เท่ากันทุกประการ แบบ ม.ด.ม.

05 ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

(1) HGJ , ด.ด.ด. (2) RPQ (3) ไม่ได้ , 8 , น้อยกว่า (4) ไม่ใช่ (5) 16 ม. · เท่ากันทุกประการ (ด.ด.ด.)

(6) ไม่เสมอไป เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

06 ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

(1) QRP , ฉ.ด.ด. (2) 8 , ฉ.ด.ด. (3) ไม่ใช่ (4) ด.ม.ด. (5) เท่ากัน (ฉ.ด.ด.) · สูง 1.5 ม.

(6) เท่ากัน เพราะรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ฉ.ด.ด.

เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

07 เลือกเงื่อนไขให้ถูก

(1) ด.ด.ด. (2) ด.ม.ด. (3) ม.ด.ม. (4) สรุปไม่ได้ (5) ฉ.ด.ด. (6) สรุปไม่ได้ (7) EFD , ด.ม.ด.

(8) ไม่ถูก สรุปไม่ได้ (เป็น ด.ด.ม.)

08 ข้อมูลที่ซ่อนในรูป

(1) ด.ด.ด. , ด้านร่วม (2) COD , ม.ด.ม. , มุมตรงข้ามมุมยอด (3) ด.ม.ด. , CD (4) ด.ม.ด. , มุมร่วม (5) 110

(6) ไม่ถูก AC เป็นด้านร่วม จึงมีด้านเท่ากัน 3 คู่ (ด.ด.ด.)

09 หาความยาว ขนาดของมุม และเขียนเหตุผล

(1) 5 (2) 30 (3) $x = 5 \cdot$ KL $= 9$ ซม. (4) $x = 5$

(5) เป็นด้านร่วม , ด.ด.ด. , มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการมีขนาดเท่ากัน (6) 15 , 30

10 ความเท่ากันทุกประการในชีวิตจริง

(1) 21 (2) 32 , ม.ด.ม. (3) 1.5 , ฉ.ด.ด. (4) D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC (BD = 4 ม.) · AD = 3 ม.

(5) ไม่จำเป็นต้องเท่า เพราะ CE ≠ CB จึงใช้ ด.ม.ด. ไม่ได้ (6) ไม่เป็น เพราะเส้นทแยงมุมยาวไม่เท่ากัน

บันทึกความก้าวหน้าของฉัน

ทำเสร็จแล้วกา ✓ ในช่อง บทเรียนไหนยังไม่มั่นใจ กาช่องสุดท้ายไว้กลับมาทบทวน

บทเรียน	เรียนหน้าซ้าย	ทำแบบฝึก	ทำถูก	อยากทบทวน
บทที่ 1 รูปที่เท่ากันทุกประการ				
01 ความเท่ากันทุกประการ	☐	☐	____ / 6	☐
02 ส่วนที่สมนัยกัน	☐	☐	____ / 6	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1			____ / 100	☐
บทที่ 2 เงื่อนไขของความเท่ากันทุกประการ				
03 ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)	☐	☐	____ / 6	☐
04 มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)	☐	☐	____ / 6	☐
05 ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)	☐	☐	____ / 6	☐
06 ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)	☐	☐	____ / 6	☐
07 เลือกเงื่อนไขให้ถูก	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2			____ / 100	☐
บทที่ 3 การนำไปใช้				
08 ข้อมูลที่ซ่อนในรูป	☐	☐	____ / 6	☐
09 หาความยาว ขนาดของมุม และเขียนเหตุผล	☐	☐	____ / 6	☐
10 ความเท่ากันทุกประการในชีวิตจริง	☐	☐	____ / 6	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3			____ / 100	☐



ครบทุกบทเรียนแล้ว เก่งมาก! เล่มถัดไป “เส้นขนาน” จะใช้มุมแย้งและผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม แล้วได้เงื่อนไขที่ห้า มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

บันทึก

One by One
Step by Step

เรียนทีละบท ฝึกทีละขั้น

หนังสือชุด One by One ม.2

1. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง
3. ปริซึมและทรงกระบอก
4. การแปลงทางเรขาคณิต
5. สมบัติของเลขยกกำลัง
6. พหุนาม
7. สถิติ (2)
8. **ความเท่ากันทุกประการ**
9. เส้นขนาน
10. การให้เหตุผลทางเรขาคณิต
11. การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง



Math Step Studio
mathstepstudio.com