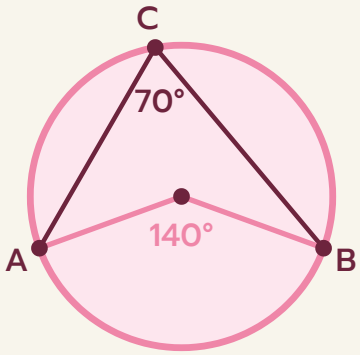
ONE BY ONE
STEP BY STEP

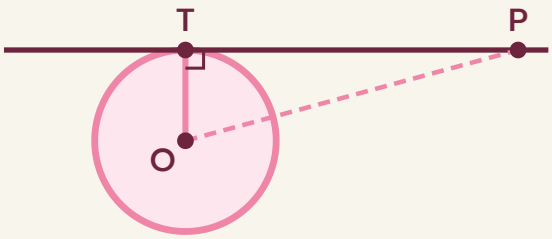


วงกลม

ม.3

11 บทเรียน · ฉบับนักเรียน





ชื่อ _____ นามสกุล _____

ชั้น ม.3/ _____ เลขที่ _____

สารบัญ

บทที่ 1 มุมในวงกลม

01 ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม	4
02 มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง	6
03 มุมในครึ่งวงกลม	8
04 มุมในส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน	10
05 รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม	12
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1	14

บทที่ 2 คอร์ด

06 เส้นตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งคอร์ด	16
07 คอร์ดยาวเท่ากัน	18
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2	20

บทที่ 3 เส้นสัมผัส

08 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี	22
09 เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกยาวเท่ากัน	24
10 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด	26
11 โจทย์ผสมและการให้เหตุผล	28
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3	30
เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น	32
บันทึกความก้าวหน้าของฉัน	34

ใช้เล่มนี้อย่างไร

ทุกบทเรียนมี 2 หน้า วางโครงเหมือนกันทุกบท เรียนทีละเรื่อง ทีละขั้น

1 หน้าซ้าย · เรียนรู้ผ่านโจทย์
อ่านโจทย์ข้อ 1 และ 2 ดูกราฟหรือตาราง แล้วเติมคำตอบลงในช่องทีละขั้น เพื่อค้นพบวิธีคิดด้วยตัวเอง

2 ก้าวขั้นอีกขั้น
กล่องสีเทาท้ายหน้า บอกเหตุผลเบื้องหลัง ทางลัด หรือเรื่องที่ต่อยอดได้

3 หน้าขวา · สรุป + ฝึก
อ่านแถบสรุปด้านบน ทำแบบฝึกหัดเบื้องต้นเรียงจากง่ายไปยาก แล้วตรวจกับเฉลยโจทย์หน้าซ้ายและเฉลยท้ายเล่ม

4 แบบทดสอบทบทวน
ท้ายแต่ละบท มีคะแนนกำกับทุกข้อ ลองทำโดยไม่เปิดดูบทเรียน แล้วรวมคะแนน

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเล่ม

O	จุดศูนย์กลางของวงกลม (ทุกรูปในเล่ม)
$\angle ACB$	มุม ACB มีจุดยอดที่ C
⊾	เครื่องหมายมุมฉาก (90°)
ขีดบนเส้น	ส่วนของเส้นตรงที่มีขีดเท่ากัน ยาวเท่ากัน
เส้นสีเหลือง	ส่วนโค้งที่รองรับมุม
$5\sqrt{2}$	จำนวนในรูปกรณฑ์ ($5 \times \sqrt{2}$)

ทบทวนก่อนเริ่ม

- มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกัน 180° · รูปสี่เหลี่ยม 360°
- มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม = ผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
- สามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุมที่ฐานเท่ากัน
- ทฤษฎีบทพีทาโกรัส $c^2 = a^2 + b^2$ และบทกลับ
- มุมตรง 180° · มุมรอบจุด 360°
- ความเท่ากันทุกประการ ด.ม.ด. ม.ด.ม. ด.ด.ด. ฉ.ด.ด.



เล่มนี้ไม่ต้องรีบ ทำทีละบทเรียน ถ้าติดตรงไหน ย้อนไปดูโจทย์ข้อ 1–2 ของบทเรียนนั้นอีกรอบ

01 ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม

ล้อจักรยาน หน้าปัดนาฬิกา ขนมครก ล้วนเป็นรูปวงกลม ทุกจุดบนวงกลมอยู่ห่างจาก**จุดศูนย์กลาง**เท่ากัน ก่อนเรียนเรื่องมุมมาทำความรู้จักชื่อส่วนต่าง ๆ ของวงกลมกันก่อน

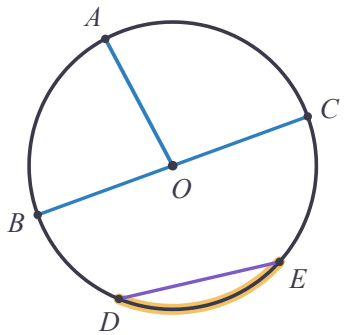
โจทย์ข้อ 1 ชื่อของส่วนต่าง ๆ

1 จุด O เรียกว่า [ ] · OA เชื่อม O กับจุดบนวงกลม เรียกว่า [ ]

2 DE เชื่อมจุดสองจุดบนวงกลม เรียกว่า [ ] · BC เป็นคอร์ดที่ผ่าน O เรียกว่า [ ]

3 $BC = OB + OC$ ยาวเป็น [ ] เท่าของรัศมี ถ้ารัศมียาว 7 ซม. BC ยาว [ ] ซม. · เส้นโค้งสีเหลืองจาก D ถึง E เรียกว่า [ ] DE

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง O



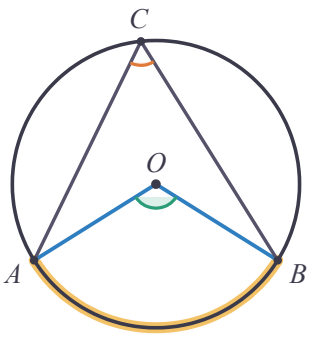
โจทย์ข้อ 2 มุมสองแบบในวงกลม

1 $\angle AOB$ มีจุดยอดอยู่ที่ [ ] แขนทั้งสองเป็นรัศมี เรียกว่า**มุมที่จุดศูนย์กลาง**

2 $\angle ACB$ มีจุดยอด C อยู่ [ ] แขนทั้งสองเป็นคอร์ด เรียกว่า**มุมในส่วนโค้งของวงกลม**

3 แขนของทั้งสองมุมไปพบวงกลมที่ A และ B เราพูดว่าทั้งสองมุม**รองรับด้วยส่วนโค้ง** [ ] (สีเหลือง)

มุมสีเขียว และมุมสีส้ม



ก้าวขึ้นอีกขั้น

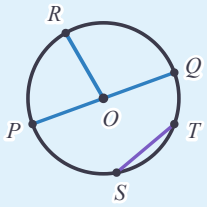
ส่วนโค้งที่รองรับมุม

คอร์ด AB แบ่งวงกลมเป็นส่วนโค้งสองส่วน มุม $\angle ACB$ รองรับด้วยส่วนโค้งที่**อยู่ระหว่างแขนของมุม** ซึ่งเป็นส่วนโค้งที่ไม่มีจุด C · ถ้าย้าย C ลงไปอยู่บนส่วนโค้งสีเหลือง มุม $\angle ACB$ จะรองรับด้วยส่วนโค้ง [ ] แทน



รัศมี เชื่อมจุดศูนย์กลางกับจุดบนวงกลม · **คอร์ด** เชื่อมจุดสองจุดบนวงกลม · **เส้นผ่านศูนย์กลาง** คือคอร์ดที่ผ่านจุดศูนย์กลาง ยาว 2 เท่าของรัศมี และยาวที่สุดในบรรดาคอร์ดทั้งหมด

มุมที่จุดศูนย์กลาง จุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลาง · **มุมในส่วนโค้งของวงกลม** จุดยอดอยู่บนวงกลม แขนเป็นคอร์ด



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(5), (7) เติมคำตอบ · ข้อ (6) ลากเส้นในรูป · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

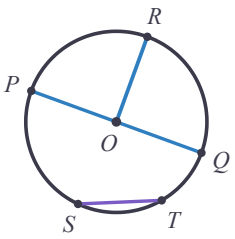
(1) วงกลมรัศมี 9 ซม. มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว ☐ ซม.

(2) วงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 15 ซม. รัศมียาว ☐ ซม.

(3) จากรูป PQ เป็น ☐

OR เป็น ☐

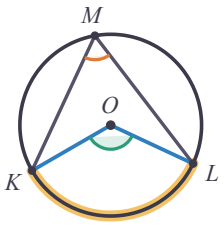
ST เป็น ☐



(4) $\angle KOL$ เป็น ☐

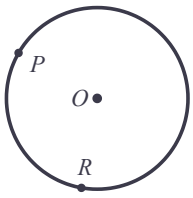
$\angle KML$ เป็น ☐

ทั้งสองมุมรองรับด้วยส่วนโค้ง ☐



(5) คอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลมรัศมี 6 ซม. คือ ☐ ยาว ☐ ซม.

(6) ลากรัศมี OP เส้นผ่านศูนย์กลาง PQ และคอร์ด QR (หาตำแหน่งจุด Q เอง)



(7) ซี่ลวดของล้อจักรยานยาวจากดุมถึงขอบล้อ 30 ซม. ซี่ลวดเปรียบได้กับ ☐ ล้อนี้สูง ☐ ซม.

(8) วงกลมรัศมี 5 ซม. มีคอร์ดยาว 12 ซม. ได้หรือไม่ อธิบาย

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 จุดศูนย์กลาง , รัศมี , คอร์ด , เส้นผ่านศูนย์กลาง , 2 , 14 , ส่วนโค้ง

โจทย์ข้อ 2 จุดศูนย์กลาง , บนวงกลม , AB

รู้ไว้ใช้ต่อ

รัศมีทุกเส้นของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมที่มีรัศมีเป็นด้านสองด้าน เช่น $\triangle OAB$ จึงเป็นรูปสามเหลี่ยม ☐ มุมที่ฐานเท่ากัน — ใช้บ่อยมากในบทเรียนต่อไป



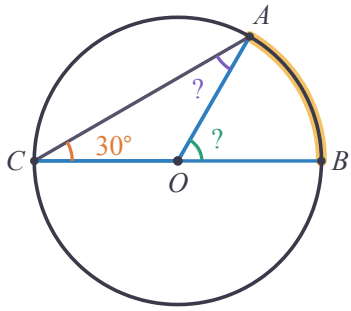
02 มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง

มุมที่จุดศูนย์กลางกับมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เริ่มจากกรณีที่จุดศูนย์กลางอยู่บนแขนของมุม แล้วใช้สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เกิดจากรัศมี

โจทย์ข้อ 1 BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $\angle ACB = 30°$

1. $OA = OC$ เพราะเป็น [ ] $\triangle OAC$ จึงเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ได้ $\angle OAC = \angle OCA =$ [ ]°
2. $\angle AOB$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle OAC$ จึงเท่ากับผลบวกของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด $\angle AOB = \angle OAC + \angle OCA =$ [ ]°
3. ดังนั้น $\angle AOB =$ [ ] × $\angle ACB$ · มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB เดียวกัน

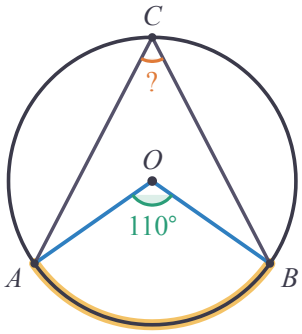
รัศมีสีฟ้ายาวเท่ากัน



โจทย์ข้อ 2 ใช้หามุม: $\angle AOB = 110°$

1. $\angle AOB$ และ $\angle ACB$ รองรับด้วยส่วนโค้ง [ ] เดียวกัน
2. $\angle ACB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = \frac{1}{2} \times 110° =$ [ ]°
3. กลับกัน ถ้า $\angle ACB = 48°$ จะได้ $\angle AOB = 2 \times 48° =$ [ ]°

หามุมที่ติด ?



ก้าวขึ้นอีกขั้น

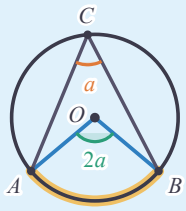
ทำไมจริงทุกกรณี

ลากเส้นผ่านศูนย์กลางจาก C ผ่าน O แบ่ง $\angle ACB$ เป็นมุม a กับ b แล้วใช้ข้อ 1 สองครั้ง ได้มุมที่จุดศูนย์กลางสองส่วน คือ [ ] กับ [ ] รวมกันเป็น $2a + 2b = 2(a + b) = 2 \times \angle ACB$



ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง เป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

$\angle AOB = 2\angle ACB$ หรือ $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$

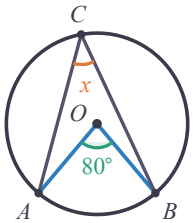


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

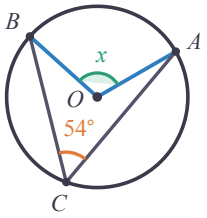
เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(7) เติมคำตอบ (O คือจุดศูนย์กลาง รูปวาดตามขนาดจริง) · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

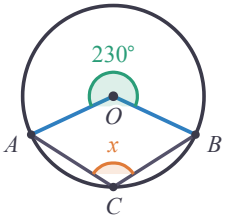
(1) $x =$ ☐°



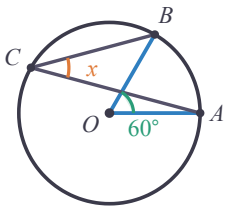
(2) $x =$ ☐°



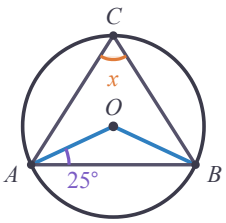
(3) $x =$ ☐°



(4) $x =$ ☐°

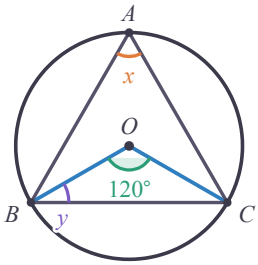


(5) $x =$ ☐°



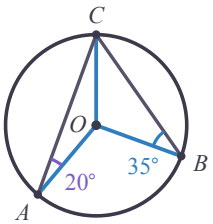
(6) $x =$ ☐°

$y =$ ☐°



(7) ถ้า $\angle ACB = 47°$ และรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกับ $\angle AOB$ แล้ว $\angle AOB =$ ☐°

(8) $\angle OAC = 20°$ และ $\angle OBC = 35°$ จงหา $\angle AOB$



เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 รัศมี , 30 , 60 , 2 โจทย์ข้อ 2 AB , 55 , 96

กับดัก! สองมุมต้องรองรับด้วย**ส่วนโค้งเดียวกัน** ถ้า C อยู่บนส่วนโค้งเล็ก AB (ข้อ 3) มุม $\angle ACB$ รองรับด้วยส่วนโค้งอีกด้าน ต้องใช้**มุมกลับ** ที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งมากกว่า 180°



03 มุมในครึ่งวงกลม

ถ้าคอร์ด AB เป็น**เส้นผ่านศูนย์กลาง** มุมที่จุดศูนย์กลาง $\angle AOB$ กลายเป็นมุมตรง ต่อยอดจากบทเรียน 02 แล้วดูว่ามุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยครึ่งวงกลมมีขนาดเท่าใด

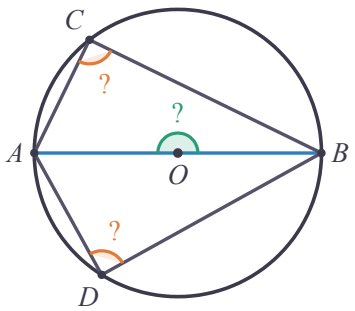
โจทย์ข้อ 1 AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

1 AB ผ่านจุดศูนย์กลาง O ดังนั้น $\angle AOB$ เป็นมุมตรง = ☐°

2 $\angle ACB$ รองรับด้วยครึ่งวงกลม (ส่วนโค้ง AB) จึงได้ $\angle ACB = \frac{1}{2} \times \angle AOB$ = ☐°

3 ย้าย C ไปที่ D ก็ได้ $\angle ADB$ = ☐° เช่นกัน · มุมในครึ่งวงกลมเป็น ☐ เสมอ

C กับ D อยู่ที่ไหนก็ได้บนวงกลม



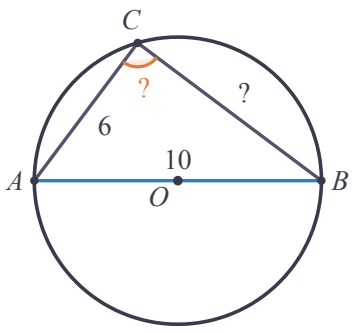
โจทย์ข้อ 2 เส้นผ่านศูนย์กลาง AB = 10 ซม. และ AC = 6 ซม.

1 $\angle ACB$ = ☐° เพราะเป็นมุมในครึ่งวงกลม $\triangle ABC$ จึงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

2 ด้านตรงข้ามมุมฉากคือ ☐ · ทฤษฎีบทพีทาโกรัส: BC^2 = $10^2 - 6^2$ = ☐

3 BC = ☐ ซม. · รัศมีของวงกลม = ☐ ซม.

รูปวาดตามมาตราส่วน



ก้าวขึ้นอีกขั้น

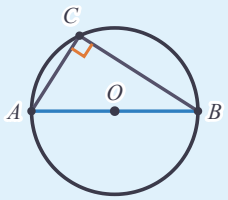
หาจุดศูนย์กลางด้วยไม้ฉาก

วางมุมฉากของไม้ฉากให้แตะขอบจานกลม แขนทั้งสองตัดขอบจานที่ P และ Q · PQ เป็น ☐ (ย้อนกลับของข้อ 1) ทำซ้ำอีกครั้งที่ตำแหน่งอื่น เส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นตัดกันที่ ☐



มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° ($\angle ACB = 90°$ เมื่อ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง)

กลับกัน ถ้ามุมในส่วนโค้ง $\angle ACB = 90°$ แล้ว AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

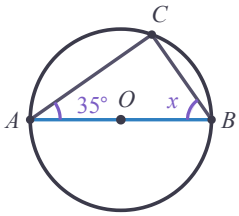


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

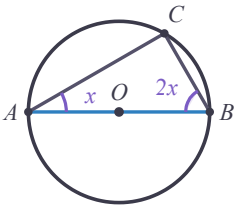
เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(4), (7) เติมคำตอบ (AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางทุกรูป) · ข้อ (5), (6), (8) แสดงวิธีทำ

(1) $x =$ ☐°

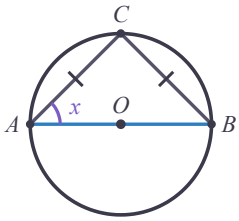


(2) $x =$ ☐°



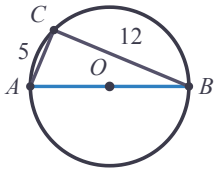
(3) $AC = BC$

$x =$ ☐°



(4) $AB =$ ☐

รัศมี = ☐



(5) วงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง $AB = 26$ ซม. จุด C อยู่บนวงกลม $AC = 10$ ซม. จงหา BC และพื้นที่ $\triangle ABC$

(6) AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 10 ซม. จุด C บนวงกลมทำให้ $AC = BC$ จงหา AC

(7) $\triangle ABC$ แนบในวงกลม $\angle ACB = 90°$ ถ้า $AB = 18$ ซม. รัศมีของวงกลมยาว ☐ ซม.

(8) $\triangle ABC$ แนบในวงกลม $AB = 17$ ซม. $BC = 15$ ซม. $CA = 8$ ซม. AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหรือไม่ รัศมียาวเท่าใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 180 , 90 , 90 , มุมฉาก โจทย์ข้อ 2 90 , AB , 64 , 8 , 5

ระวัง! $\angle ACB = 90°$ ก็ต่อเมื่อ AB **ผ่านจุดศูนย์กลาง** ถ้าคอร์ด AB ไม่ผ่าน O มุมในส่วนโค้งจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 90° อย่าตัดสินจากรูปว่า “ดูเหมือนมุมฉาก”



04 มุมในส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน

ถ้ามีมุมในส่วนโค้งหลายมุม รองรับด้วยส่วนโค้ง AB เดียวกัน (จุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของคอร์ด AB) มุมเหล่านั้นมีขนาดเป็นอย่างไร ใช้มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นตัวกลาง

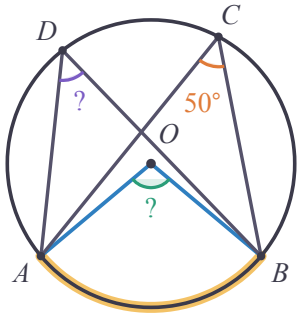
โจทย์ข้อ 1 C และ D อยู่ข้างเดียวกันของคอร์ด AB · $\angle ACB = 50°$

1 $\angle AOB = 2 \times \angle ACB =$ ☐° (บทเรียน 02)

2 $\angle ADB$ ก็รองรับด้วยส่วนโค้ง AB เดียวกัน จึงได้ $\angle ADB = \frac{1}{2} \times \angle AOB =$ ☐°

3 สรุป $\angle ACB$ กับ $\angle ADB$ มีขนาด ☐ ไม่ว่า D อยู่ตรงไหนบนส่วนโค้งด้านบน

มุมสีส้ม และมุมสีม่วง



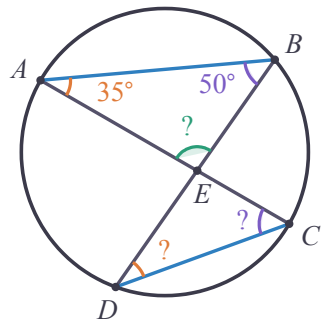
โจทย์ข้อ 2 รูปผีเสื้อในวงกลม

1 $\angle BAC$ กับ $\angle BDC$ รองรับด้วยส่วนโค้ง ☐ เดียวกัน จึงได้ $\angle BDC =$ ☐°

2 $\angle ABD$ กับ $\angle ACD$ รองรับด้วยส่วนโค้ง ☐ เดียวกัน จึงได้ $\angle ACD =$ ☐°

3 ใน $\triangle ABE$: $\angle AEB = 180° - 35° - 50° =$ ☐°

คอร์ด AC กับ BD ตัดกันที่ E



ก้าวขึ้นอีกขั้น

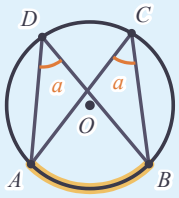
กับดัก! อยู่คนละข้างของคอร์ด

ถ้า C กับ D อยู่**คนละข้าง**ของคอร์ด AB สองมุมรองรับด้วยส่วนโค้งคนละส่วน จึงไม่เท่ากัน เช่น $\angle ACB = 70°$ แต่ $\angle ADB =$ ☐° สังเกตว่ารวมกันได้ ☐° (เรียนต่อในบทเรียน 05)



มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน

ตรวจก่อนใช้: แขนของทั้งสองมุมไปพบวงกลมที่จุดคู่เดียวกัน และจุดยอดอยู่ข้างเดียวกันของคอร์ด

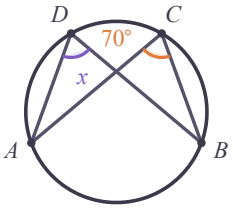


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

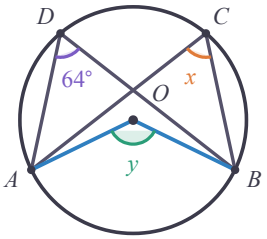
ข้อ (1)–(6) เติมคำตอบ (รูปวาดตามขนาดจริง) · ข้อ (7), (8) แสดงวิธีทำ

(1) $x =$ ☐°



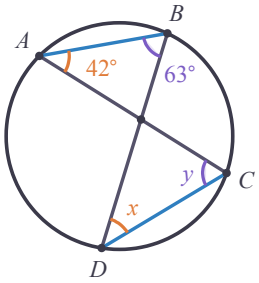
(2) $x =$ ☐°

$y =$ ☐°



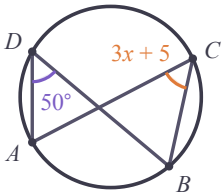
(3) $x =$ ☐°

$y =$ ☐°

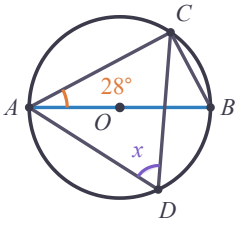


(4) $x =$ ☐

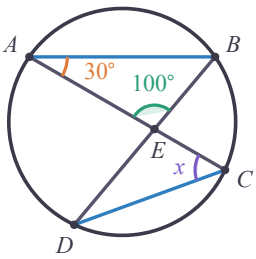
$\angle ACB =$ ☐°



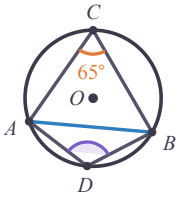
(5) $x =$ ☐°



(6) $x =$ ☐°



(7) ภูผาบอกว่า $\angle ADB = \angle ACB = 65°$ เพราะรองรับด้วยส่วนโค้ง AB เดียวกัน ผิดตรงไหน



(8) C และ D อยู่ข้างเดียวกันของคอร์ด AB $\angle ACB = (2x + 10)°$ และ $\angle ADB = (4x - 30)°$ จงหา x และ $\angle ACB$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 100 , 50 , เท่ากัน โจทย์ข้อ 2 BC , 35 , AD , 50 , 95

ระวัง! จับคู่ให้ถูกส่วนโค้ง

ในรูปผีเสื้อ มุมที่เท่ากันคือมุมที่**มองเห็นคอร์ดเดียวกัน** ($\angle BAC$ กับ $\angle BDC$ มองคอร์ด BC) ไม่ใช่มุมที่อยู่ตรงข้ามกันในรูป ไล่ดูว่าแขนของมุมไปพบวงกลมที่จุดใด



05 รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

รูปสี่เหลี่ยมที่จุดยอดทั้งสี่อยู่บนวงกลม เรียกว่า**รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม** มุมตรงข้ามของรูปนี้มีความสัมพันธ์พิเศษ หาได้จากมุมที่จุดศูนย์กลาง

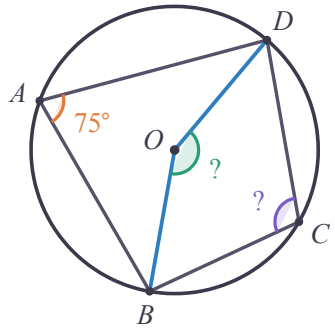
โจทย์ข้อ 1 $ABCD$ แนบในวงกลม $\angle BAD = 75°$

1 $\angle BAD$ รองรับด้วยส่วนโค้ง BCD จึงได้ $\angle BOD$ (ด้านที่มี C) $= 2 \times 75° =$ ☐°

2 $\angle BCD$ รองรับด้วยส่วนโค้ง BAD ซึ่งมีมุมกลับ $\angle BOD = 360° - 150° =$ ☐° จึงได้ $\angle BCD =$ ☐°

3 $\angle BAD + \angle BCD =$ ☐° · มุมตรงข้ามอีกคู่ $\angle ABC + \angle ADC$ ก็รวมกันได้ 180° เช่นกัน

มุมตรงข้าม A กับ C



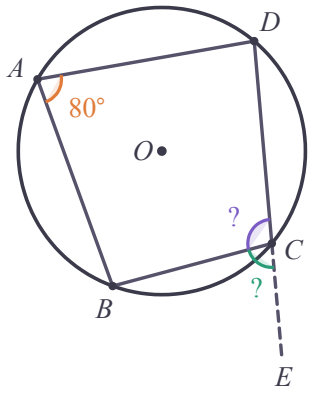
โจทย์ข้อ 2 มุมภายนอกของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

1 $\angle BCD = 180° - \angle BAD =$ ☐° (มุมตรงข้ามรวมกัน 180°)

2 D, C, E อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จึงได้ $\angle BCE = 180° - \angle BCD =$ ☐°

3 มุมภายนอก $\angle BCE$ เท่ากับมุมภายใน ☐ ที่อยู่ตรงข้าม

ต่อด้าน DC ออกไปถึง E



ก้าวขึ้นอีกขั้น

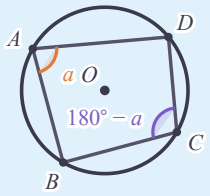
รูปสี่เหลี่ยมใดแนบในวงกลมได้

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบในวงกลมได้เสมอ เพราะมุมตรงข้ามรวมกัน 90° + 90° = 180° · รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุม 70° มุมตรงข้ามเท่ากัน รวมกันได้ 70° + 70° = ☐° จึง ☐



รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม: มุมตรงข้ามรวมกันได้ 180° ($\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$)

มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม



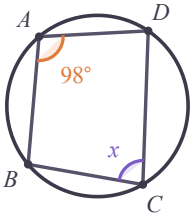
แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(6) เติมคำตอบ (รูปวาดตามขนาดจริง) · ข้อ (7), (8) แสดงวิธีทำ

(1)

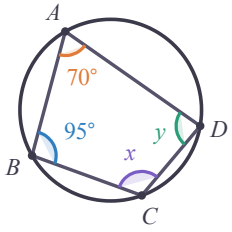
$x =$ ☐°



(2)

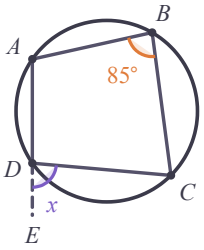
$x =$ ☐°

$y =$ ☐°



(3)

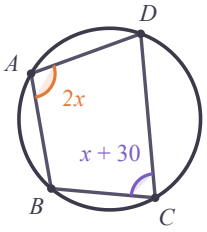
$x =$ ☐°



(4)

$x =$ ☐

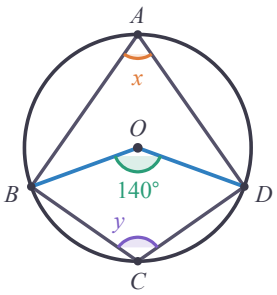
$\angle BAD =$ ☐°



(5)

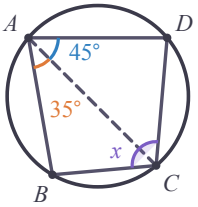
$x =$ ☐°

$y =$ ☐°



(6)

$x =$ ☐°



(7) รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีมุมภายใน $\angle A = 75°$, $\angle B = 95°$, $\angle C = 105°$, $\angle D = 85°$ แนบในวงกลมได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(8) $ABCD$ แนบในวงกลม $\angle A : \angle C = 2 : 3$ และ $\angle B$ มากกว่า $\angle D$ อยู่ $40°$ จงหาขนาดของมุมทั้งสี่

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 150 , 210 , 105 , 180 โจทย์ข้อ 2 100 , 80 , $\angle BAD$

ระวัง! มุมที่รวมกันได้ 180° คือมุม**ตรงข้าม** ($\angle A$ กับ $\angle C$, $\angle B$ กับ $\angle D$) ไม่ใช่มุมที่อยู่ติดกัน · และใช้ได้เฉพาะเมื่อจุดยอด**ทั้งสี่**อยู่บนวงกลม



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 1 มุมในวงกลม

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

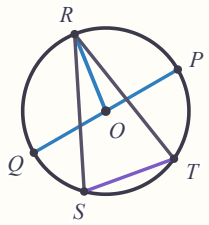
_____

/ 100



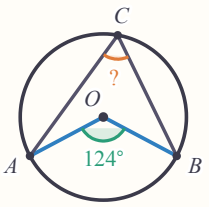
1
10 คะแนน

จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลาง จงบอกชื่อ (ก) รัศมี 1 เส้น (ข) เส้นผ่านศูนย์กลาง (ค) คอร์ดที่ไม่ผ่าน O 1 เส้น (ง) มุมในส่วนโค้งของวงกลม 1 มุม



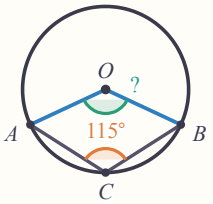
2
10 คะแนน

O เป็นจุดศูนย์กลาง $\angle AOB = 124°$ จงหา $\angle ACB$



3
10 คะแนน

C อยู่บนส่วนโค้งเล็ก AB และ $\angle ACB = 115°$ จงหา $\angle AOB$ (มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ)

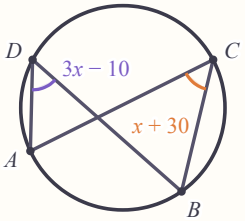


4
10 คะแนน

วงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง $AB = 20$ ซม. จุด C อยู่บนวงกลม และ $AC = 12$ ซม. จงหา BC และพื้นที่ $\triangle ABC$

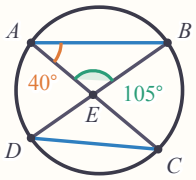
5
10 คะแนน

C และ D อยู่ข้างเดียวกันของคอร์ด AB จงหา x และ $\angle ADB$



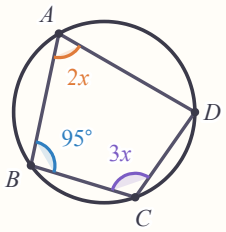
6
10 คะแนน

คอร์ด AC กับ BD ตัดกันที่ E $\angle BAC = 40°$ และ $\angle AEB = 105°$ จงหา $\angle BDC$ และ $\angle ACD$



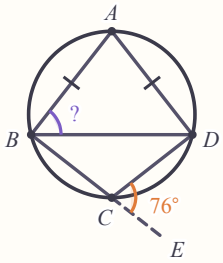
7
10 คะแนน

$ABCD$ แนบในวงกลม จงหา x และ $\angle ADC$



8
10 คะแนน

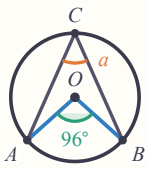
$ABCD$ แนบในวงกลม $AB = AD$ ต่อ BC ไปถึง E $\angle DCE = 76°$ จงหา $\angle ABD$



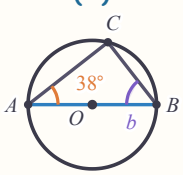
9
10 คะแนน

หาขนาดของมุมที่ติดตัวอักษร (O คือจุดศูนย์กลาง)

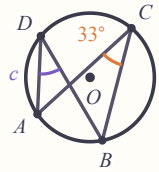
(ก)



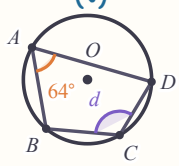
(ข)



(ค)

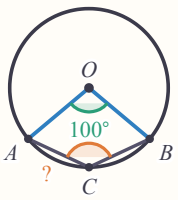


(ง)



10
10 คะแนน

$\angle AOB = 100°$ และ C อยู่บนส่วนโค้งเล็ก AB · น้ำฝนตอบ $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$ ส่วนต้นกล้าตอบ $\angle ACB = \frac{1}{2} \times (360° - 100°) = 130°$ ใครถูก เพราะเหตุใด



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ทั้งหมดมาจากสมบัติเดียว

ทุกบทเรียนมาจาก “มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง”: ครึ่งวงกลม 180° ÷ 2 · ส่วนโค้งเดียวกันได้ครึ่งของมุมเดียวกัน · มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมได้ครึ่งของ 360°



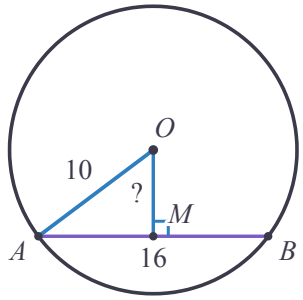
06 เส้นตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งคอร์ด

ลากเส้นจากจุดศูนย์กลางไป**ตั้งฉาก**กับคอร์ด จะเกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซ่อนอยู่ในวงกลม ด้านตรงข้ามมุมฉากคือรัศมี จึงใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหาความยาวได้

โจทย์ข้อ 1 รัศมี 10 ซม. คอร์ด AB ยาว 16 ซม. และ $OM \perp AB$

1. $\triangle OAM$ กับ $\triangle OBM$: $OA = OB$ (รัศมี) OM เป็นด้านร่วม และมุมฉากที่ M จึงเท่ากันทุกประการแบบ ☐ ได้ $AM = MB =$ ☐ ซม.
2. $\triangle OAM$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก: $OM^2 = OA^2 - AM^2 =$ ☐
3. $OM =$ ☐ ซม. คือระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด

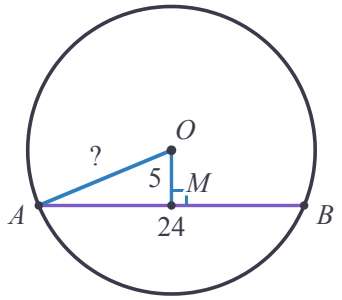
สามเหลี่ยมมุมฉากในวงกลม



โจทย์ข้อ 2 ย้อนกลับ: หารัศมี

1. คอร์ด $AB = 24$ ซม. ห่างจาก O 5 ซม. · M เป็นจุดกึ่งกลาง จึงได้ $AM =$ ☐ ซม.
2. $OA^2 = OM^2 + AM^2 =$ ☐
3. รัศมี $OA =$ ☐ ซม.

หาความยาวที่ติด ?



ก้าวขึ้นอีกขั้น

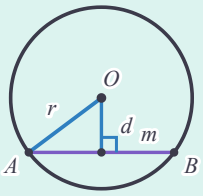
หาจุดศูนย์กลางของจานที่แตก

เส้นที่แบ่งครึ่งคอร์ดและตั้งฉากกับคอร์ด ผ่านจุดศูนย์กลางเสมอ · ชิ้นส่วนจานแตก: ลากคอร์ดสองเส้น สร้างเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของแต่ละคอร์ด จุดที่สองเส้นตัดกันคือ ☐ แล้ววัดรัศมีได้



เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

$r^2 = d^2 + m^2$ เมื่อ d = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด และ m = ครึ่งหนึ่งของคอร์ด

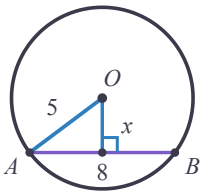


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

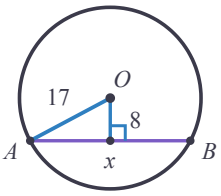
➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(4) เติมคำตอบ (รูปวาดตามมาตราส่วน หน่วยเป็นเซนติเมตร) · ข้อ (5)–(8) แสดงวิธีทำ

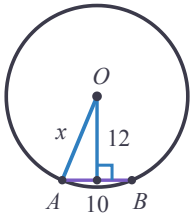
(1) $x =$ ☐



(2) $x =$ ☐



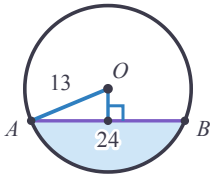
(3) $x =$ ☐



(4) วงกลมรัศมี 25 ซม. คอร์ดห่างจากจุดศูนย์กลาง 7 ซม. คอร์ดยาว ☐ ซม.

(5) วงกลมรัศมี 6 ซม. มีคอร์ดยาว 8 ซม. คอร์ดนี้ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่าใด

(6) ท่อน้ำรัศมี 13 ซม. ผิวน้ำในท่อกว้าง 24 ซม. (ต่ำกว่าจุดศูนย์กลาง) น้ำลึกเท่าใด



(7) วงกลมรัศมี 10 ซม. มีคอร์ดขนานกันสองเส้นยาว 12 ซม. และ 16 ซม. คอร์ดทั้งสองห่างกันเท่าใด (มี 2 กรณี)

(8) สะพานโค้งเป็นส่วนของวงกลม ช่วงกว้าง 16 ม. จุดสูงสุดสูงจากฐาน 4 ม. จงหารัศมีของวงกลม

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย
โจทย์ข้อ 1 ฉาก–ด้าน–ด้าน , 8 , 36 , 6 โจทย์ข้อ 2 12 , 169 , 13

ระวัง! เส้นจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งคอร์ดก็ต่อเมื่อ**ตั้งฉาก**กับคอร์ด · ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดวัดตามแนวตั้งฉากเสมอ และด้านตรงข้ามมุมฉากคือ**รัศมี**



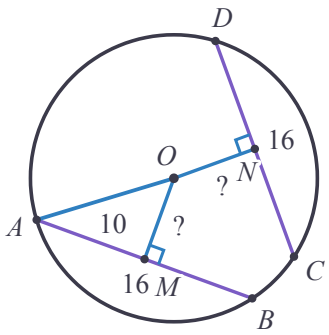
07 คอร์ดยาวเท่ากัน

ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน คอร์ดทั้งสองอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่าไร และมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นอย่างไร ต่อยอดจากบทเรียน 06

โจทย์ข้อ 1 รัศมี 10 ซม. คอร์ด $AB = CD = 16$ ซม.

1. M แบ่งครึ่ง AB: $AM =$ ☐ ซม. · $OM^2 = 10^2 - AM^2$ จึงได้ $OM =$ ☐ ซม.
2. ทำแบบเดียวกันกับ CD: $ON =$ ☐ ซม.
3. คอร์ดที่ยาวเท่ากัน อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง ☐ · กลับกัน คอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันก็ยาวเท่ากัน

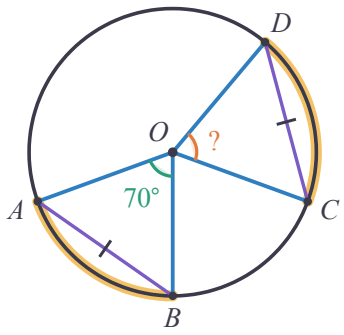
คอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน



โจทย์ข้อ 2 $AB = CD$ และ $\angle AOB = 70°$

1. $OA = OB = OC = OD$ เพราะเป็น ☐ และ $AB = CD$
2. $\triangle AOB \cong \triangle COD$ แบบด้าน–ด้าน–ด้าน จึงได้ $\angle COD = \angle AOB =$ ☐°
3. มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน ส่วนโค้ง AB กับส่วนโค้ง CD จึงยาว ☐

ขีดเท่ากัน = ยาวเท่ากัน



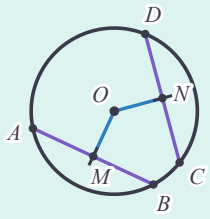
ก้าวขึ้นอีกขั้น

คอร์ดยิ่งใกล้จุดศูนย์กลางยิ่งยาว

วงกลมรัศมี 10 ซม.: คอร์ดห่าง 8 ซม. ยาว ☐ ซม. · ห่าง 6 ซม. ยาว 16 ซม. · ห่าง 0 ซม. ยาว 20 ซม. ซึ่งคือ ☐



ในวงกลมเดียวกัน คอร์ดยาวเท่ากัน ⇔ ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน ⇔ มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน ⇔ ส่วนโค้งยาวเท่ากัน

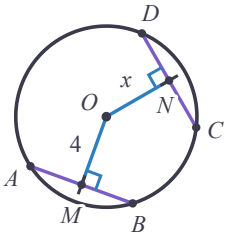


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

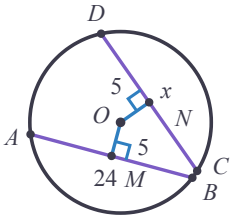
ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ (ขีดเท่ากันแทนความยาวเท่ากัน) · ข้อ (6)–(8) แสดงวิธีทำ

(1) $x =$ ☐



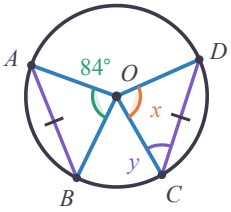
(2) $x =$ ☐

รัศมี $=$ ☐



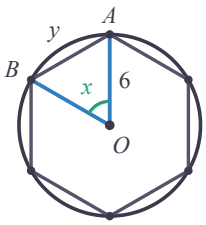
(3) $x =$ ☐ °

$y =$ ☐ °



(4) รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

$x =$ ☐ ° $y =$ ☐



(5) หน้าปัดนาฬิกามีตัวเลข 12 ตัวห่างเท่ากัน มุมที่จุดศูนย์กลางระหว่างเลขที่ติดกัน = ☐ ° · คอร์ดจากเลข 12 ไปเลข 4 ยาวเท่ากับคอร์ดจากเลข 3 ไปเลข ☐

(6) วงกลมรัศมี 10 ซม. มีคอร์ด $AB = 12$ ซม. และ $CD = 16$ ซม. คอร์ดใดอยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่า และห่างเท่าใด

(7) $AB = CD$ เป็นคอร์ดของวงกลมจุดศูนย์กลาง O และ $\angle OAB = 35°$ จงหา $\angle COD$

(8) “คอร์ดสองเส้นที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน ยาวเท่ากันเสมอ” ถ้าคอร์ดอยู่บนวงกลมคนละวง ข้อความนี้ยังจริงหรือไม่ ยกตัวอย่าง

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 8 , 6 , 6 , เท่ากัน โจทย์ข้อ 2 รัศมี , 70 , เท่ากัน

ระวัง! สมบัติคอร์ดยาวเท่ากันใช้ได้กับ**วงกลมเดียวกัน**หรือวงกลมที่รัศมีเท่ากันเท่านั้น



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 2 คอร์ด

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

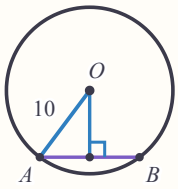
_____

/ 100



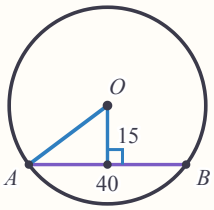
1 10 คะแนน

วงกลมรัศมี 10 ซม. คอร์ด AB ยาว 12 ซม. คอร์ดนี้ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่าใด



2 10 คะแนน

คอร์ดยาว 40 ซม. ห่างจากจุดศูนย์กลาง 15 ซม. วงกลมนี้มีรัศมีเท่าใด



3 10 คะแนน

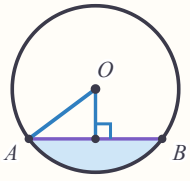
วงกลมรัศมี 13 ซม. คอร์ดห่างจากจุดศูนย์กลาง 5 ซม. คอร์ดยาวเท่าใด

4 10 คะแนน

วงกลมรัศมี 7 ซม. คอร์ดยาว 10 ซม. คอร์ดห่างจากจุดศูนย์กลางเท่าใด (ตอบในรูปกรณฑ์อย่างง่าย)

5 10 คะแนน

ท่อระบายน้ำรัศมี 50 ซม. ผิวน้ำกว้าง 80 ซม. และอยู่ต่ำกว่าจุดศูนย์กลาง น้ำลึกเท่าใด

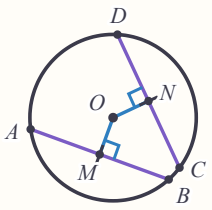


6 10 คะแนน

วงกลมรัศมี 25 ซม. มีคอร์ดขนานกันยาว 48 ซม. และ 40 ซม. คอร์ดทั้งสองห่างกันเท่าใด (ตอบทั้ง 2 กรณี)

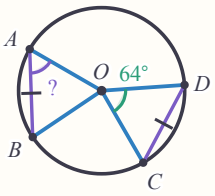
7 10 คะแนน

คอร์ด $AB = CD = 30$ ซม. ในวงกลมรัศมี 17 ซม. จงหาระยะ OM และ ON



8 10 คะแนน

$AB = CD$ และ $\angle COD = 64°$ จงหา $\angle OAB$



9 10 คะแนน

ซุ้มประตูโค้งเป็นส่วนของวงกลม กว้าง 24 ดม. สูง 8 ดม. จงหารัศมีของวงกลม

10 10 คะแนน

ปรางหาระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดยาว 16 ซม. ในวงกลมรัศมี 10 ซม. ดังนี้ “$d = \sqrt{(10^2 + 8^2)} = \sqrt{164}$”

ปรางผิดตรงไหน และคำตอบที่ถูกคือเท่าใด

ก้าวขึ้นอีกขั้น

สามเหลี่ยมมุมฉากซ่อนอยู่

ทุกข้อในบทนี้มีสามเหลี่ยมมุมฉาก (รัศมี, ระยะถึงคอร์ด, ครึ่งคอร์ด) ซ่อนอยู่ ลากเส้นตั้งฉากก่อนเสมอ แล้วถามว่าด้านใดเป็นรัศมี



08 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี

เส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุดเรียกว่า**เส้นตัดวงกลม** ส่วนเส้นตรงที่แตะวงกลมเพียงจุดเดียวเรียกว่า**เส้นสัมผัสวงกลม** และจุดที่แตะเรียกว่า**จุดสัมผัส** เช่น ล้อรถแตะพื้นถนน

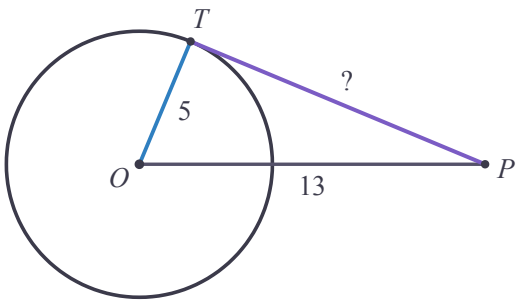
โจทย์ข้อ 1 PT สัมผัสวงกลมที่ T รัศมี 5 ซม. และ OP = 13 ซม.

1 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส จึงได้ $\angle OTP$ = ☐°

2 $\triangle OTP$ มีด้านตรงข้ามมุมฉากคือ ☐ $\cdot PT^2$
= $13^2 - 5^2$ = ☐

3 PT = ☐ ซม.

เส้นสัมผัสสีม่วง

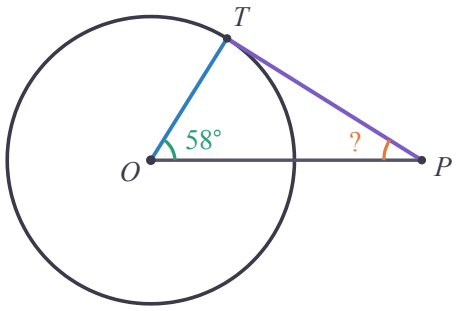


โจทย์ข้อ 2 PT สัมผัสวงกลมที่ T และ $\angle TOP$ = 58°

1 $\angle OTP$ = ☐° (เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี)

2 มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกัน 180°: $\angle OPT$ = 180° − $\angle OTP$ − 58° = ☐°

หามุมที่ติด ?



ก้าวขึ้นอีกขั้น

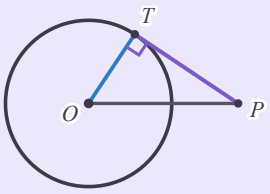
ทำไมจึงตั้งฉาก

จุดอื่นทุกจุดบนเส้นสัมผัสอยู่นอกวงกลม จึงห่างจาก O มากกว่ารัศมี $OT \cdot OT$ จึงเป็นระยะที่สั้นที่สุดจาก O ถึงเส้นสัมผัส และระยะที่สั้นที่สุดจากจุดถึงเส้นตรงคือระยะตาม ☐



เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส

$OP^2 = OT^2 + PT^2$ (OP เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก)

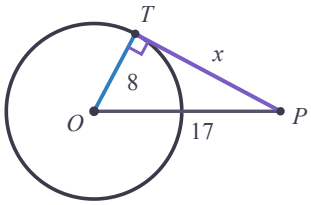


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

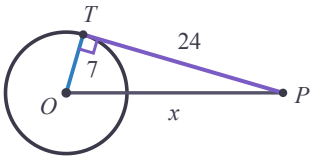
เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(6) เติมคำตอบ (PT สัมผัสวงกลมที่ T, หน่วยเซนติเมตร) · ข้อ (7), (8) แสดงวิธีทำ

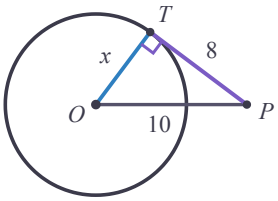
(1) $x =$ ☐



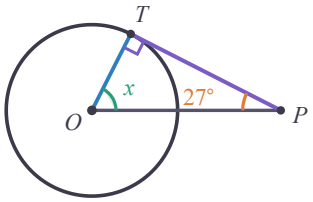
(2) $x =$ ☐



(3) $x =$ ☐

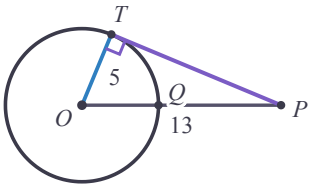


(4) $x =$ ☐°



(5) $PQ =$ ☐

$PT =$ ☐



(6) ล้อรถรัศมี 30 ซม. แตะพื้นถนนที่จุด T รัศมี OT ทำมุมกับพื้นถนน ☐° และดุมล้อสูงจากพื้น ☐ ซม.

(7) วงกลมรัศมี 4 ซม. จุด P ห่างจากจุดศูนย์กลาง 8 ซม. จงหาความยาวเส้นสัมผัส PT

(8) หลัก P อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของสระน้ำกลม 26 ม. สระมีรัศมี 10 ม. ขึงเชือกจาก P ไปแตะขอบสระพอดี (เป็นเส้นสัมผัส) เชือกยาวเท่าใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 90 , OP , 144 , 12 โจทย์ข้อ 2 90 , 32

ระวัง! ด้านตรงข้ามมุมฉากคือ OP (จากจุดศูนย์กลางถึงจุดภายนอก) ไม่ใช่เส้นสัมผัส PT · PT จึงสั้นกว่า OP เสมอ



09 เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกยาวเท่ากัน

จากจุด P ภายนอกวงกลม ลากเส้นสัมผัสได้ 2 เส้น แตะวงกลมที่ A และ B เส้นสัมผัสทั้งสองยาวเท่ากันหรือไม่ ใช้รัศมีที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส (บทเรียน 08) และความเท่ากันทุกประการ

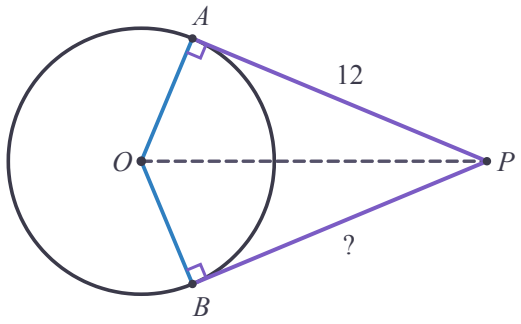
โจทย์ข้อ 1 PA, PB สัมผัสวงกลมที่ A, B และ $PA = 12$ ซม.

1 $\angle OAP = \angle OBP = 90° \cdot OA = OB$ เพราะเป็น ☐ $\cdot OP$ เป็นด้านร่วม

2 $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ แบบ ☐ จึงได้ $PB = PA =$ ☐ ซม.

3 และ $\angle APO = \angle$ ☐ : OP แบ่งครึ่งมุม $\angle APB$

รูปว่าว OAPB



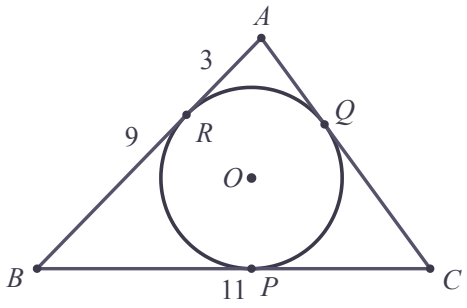
โจทย์ข้อ 2 วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม

1 วงกลมสัมผัสด้านทั้งสามที่ $P, Q, R \cdot$ จาก A: $AQ = AR =$ ☐ $\cdot BR = 9 - 3 =$ ☐ $= BP$

2 $PC = 11 - BP =$ ☐ $= CQ$

3 $CA = CQ + QA =$ ☐ ซม. $\cdot$ ความยาวรอบรูป = ☐ ซม.

เส้นสัมผัสจาก A, B, C



ก้าวขึ้นอีกขั้น

รูปว่าวกับมุม 180°

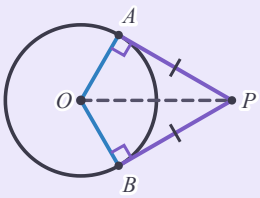
รูปสี่เหลี่ยม $OAPB$ มีมุมฉากสองมุม (A และ B) มุมภายในรวม 360° จึงได้ $\angle APB + \angle AOB =$ ☐° ถ้า $\angle APB = 50°$ แล้ว $\angle AOB =$ ☐°



ส่วนของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกจุดเดียวกันมายังวงกลมสองเส้น ยาวเท่ากัน

$(PA = PB)$ และ OP แบ่งครึ่ง $\angle APB$

$\angle APB + \angle AOB = 180°$

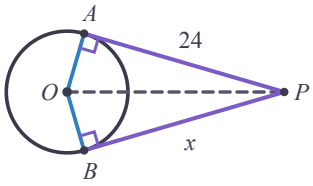


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

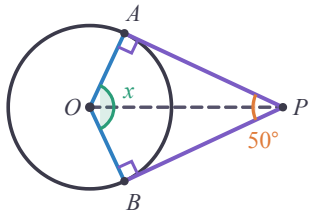
เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ (*PA*, *PB* สัมผัสวงกลม) · ข้อ (6)–(8) แสดงวิธีทำ

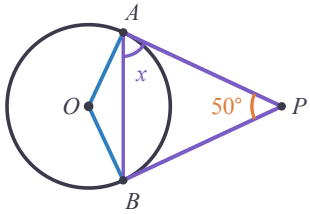
(1) $x =$ ☐



(2) $x =$ ☐ °



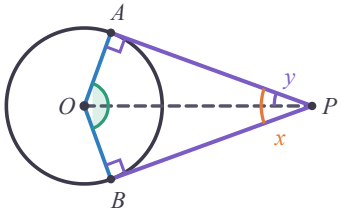
(3) $x =$ ☐ °



(4) $\angle AOB = 140°$

$x =$ ☐ °

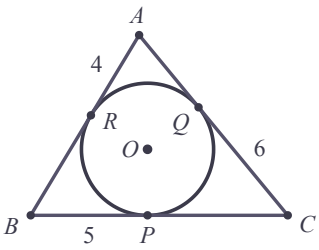
$y =$ ☐ °



(5) $AB =$ ☐

รอบรูป =

☐



(6) รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีวงกลมแนบใน (สัมผัสทั้งสี่ด้าน) $AB = 10$, $BC = 12$, $CD = 9$ ซม. จงหา DA

(7) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้านยาว 6, 8, 10 ซม. มีวงกลมแนบใน จงหารัศมีของวงกลม

(8) เพื่อนบอกว่า “ในรูปว่าว $OAPB$ มุมตรงข้ามเท่ากัน ดังนั้น $\angle APB = \angle AOB$” ถ้า $\angle APB = 60°$ เพื่อนผิดอย่างไร $\angle AOB$ เท่ากับเท่าใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 รัศมี , ฉาก–ด้าน–ด้าน , 12 , BPO **โจทย์ข้อ 2** 3 , 6 , 5 , 8 , 28

ระวัง! $PA = PB$ เฉพาะเส้นสัมผัสที่ลากจาก**จุดภายนอกจุดเดียวกัน** · ในวงกลมแนบในสามเหลี่ยม เส้นสัมผัสจากมุมต่างกันยาวไม่เท่ากัน



10 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด

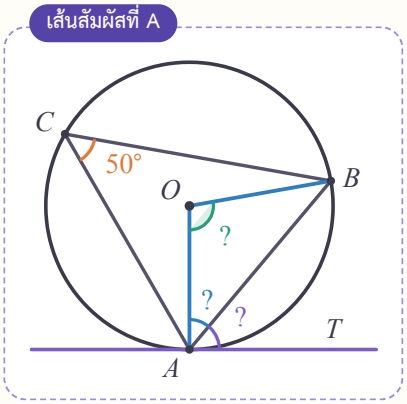
ที่จุดสัมผัส A ถ้าลากคอร์ด AB จะเกิดมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด มุมนี้สัมพันธ์กับมุมในส่วนโค้งของวงกลมอย่างไร ใช้ทั้งบทเรียน 02 และบทเรียน 08

โจทย์ข้อ 1 TA สัมผัสวงกลมที่ A และ $\angle ACB = 50°$

1 $\angle AOB = 2 \times \angle ACB =$ ☐° · $\triangle OAB$ หน้าจั่ว: $\angle OAB = (180° - \angle AOB) \div 2 =$ ☐°

2 $\angle OAT =$ ☐° (เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี) จึงได้ $\angle BAT = \angle OAT - \angle OAB =$ ☐°

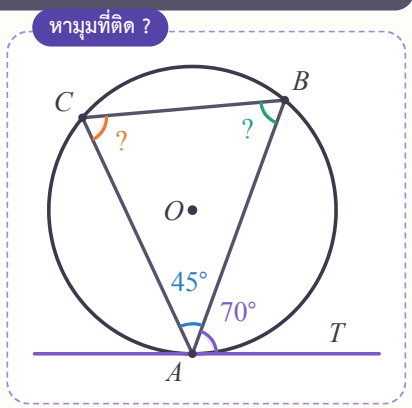
3 สรุป $\angle BAT = \angle$ ☐ : มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด เท่ากับมุมในส่วนโค้งที่อยู่ตรงข้าม



โจทย์ข้อ 2 ใช้หามุม: $\angle TAB = 70°$ และ $\angle BAC = 45°$

1 $\angle ACB$ อยู่ตรงข้ามกับ $\angle TAB$ (อีกฝั่งของคอร์ด AB) จึงได้ $\angle ACB =$ ☐°

2 ใน $\triangle ABC$: $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB =$ ☐°



ก้าวขึ้นอีกขั้น

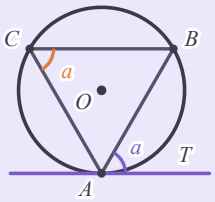
มาจากมุมในส่วนโค้งเดียวกัน

ลองเลื่อนจุด D บนวงกลมเข้าใกล้ A เรื่อย ๆ $\angle ADB = \angle ACB$ ตลอด (บทเรียน 04) เมื่อ D ไปถึง A คอร์ด DA กลายเป็น ☐ มุมจึงกลายเป็น $\angle BAT$



มุมที่เส้นสัมผัสทำกับคอร์ดที่จุดสัมผัส เท่ากับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้าม

$(\angle BAT = \angle ACB)$



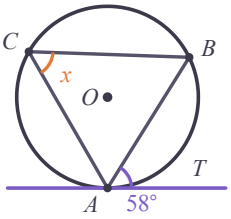
08
09
10
11

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

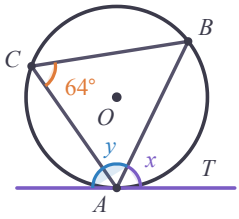
ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ (TA สัมผัสวงกลมที่ A) · ข้อ (6)–(8) แสดงวิธีทำ

(1) $x =$ ☐°



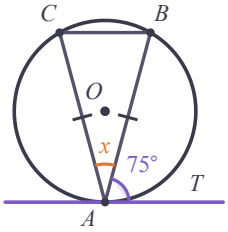
(2) $x =$ ☐°

$y =$ ☐°



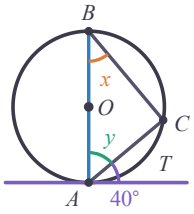
(3) $AB = AC$

$x =$ ☐°



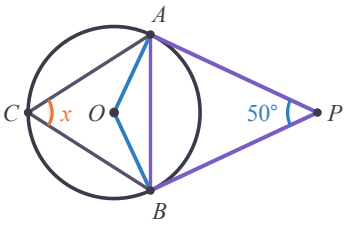
(4) AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$x =$ ☐° $y =$ ☐°



(5) PA, PB สัมผัสวงกลม

$x =$ ☐°



(6) TA สัมผัสวงกลมที่ A $\angle BAT = 3x°$ และ $\angle ACB = (x + 40)°$ (C อยู่อีกฝั่งของคอร์ด AB) จงหา x

(7) เส้นสัมผัสที่ A ทำมุม 35° กับคอร์ด AB จงหามุมที่จุดศูนย์กลาง $\angle AOB$

(8) เส้นสัมผัสที่ A ทำมุม 72° กับคอร์ด AB จุด C และ D อยู่บนวงกลมคนละข้างของ AB (C อยู่ฝั่งตรงข้ามกับมุม 72°) จงหา $\angle ACB$ และ $\angle ADB$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 100 , 40 , 90 , 50 , ACB โจทย์ข้อ 2 70 , 65

ระวัง! ใช้มุมในส่วนโค้งที่อยู่**อีกฝั่งของคอร์ด** (ตรงข้ามกับมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด) ถ้าใช้มุมฝั่งเดียวกันจะได้ 180° ลบมุมนั้น

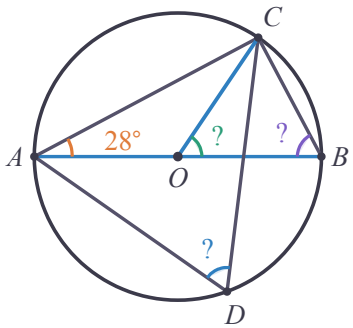


11 โจทย์ผสมและการให้เหตุผล

โจทย์วงกลมจริง ๆ มักต้องใช้หลายสมบัติต่อกัน เริ่มจากมุมหรือความยาวที่รู้ แล้วหาสมบัติที่เชื่อมไปยังสิ่งที่ต้องการ ทีละบรรทัด และ**บอกเหตุผลทุกบรรทัด**

โจทย์ข้อ 1 AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง $\angle CAB = 28°$

หามุมที่ติด ? ทีละมุม

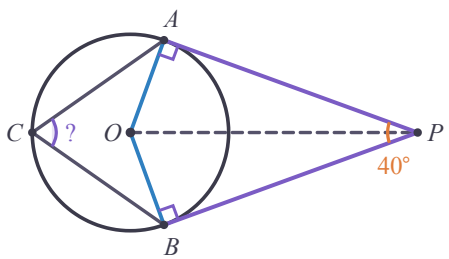


1. $\angle ACB =$ ☐° เพราะเป็น ☐
2. $\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle CAB =$ ☐° (มุมภายในสามเหลี่ยม)
3. $\angle ADC = \angle ABC =$ ☐° (รองรับด้วยส่วนโค้ง AC เดียวกัน) · $\angle BOC = 2 \times \angle BAC =$ ☐°

โจทย์ข้อ 2 PA, PB สัมผัสวงกลม $\angle APB = 40°$ จงหา $\angle ACB$

ข้อความ	เหตุผล
$\angle OAP = \angle OBP = 90°$	
$\angle AOB = 360° - 90° - 90° - 40° =$ ☐°	
$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB =$ ☐°	

เขียนเหตุผลในตาราง



ก้าวขึ้นอีกขั้น

เหตุผลที่ใช้บ่อยในบทนี้

มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง · มุมในครึ่งวงกลม = 90° · มุมในส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน · มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมแนบในรวม 180° · รัศมียาวเท่ากัน (หน้าจั่ว) · เส้นสัมผัส ⊥ รัศมี · เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกยาวเท่ากัน · ห้ามใช้ “ดูจากรูป” เป็นเหตุผล



หามุมหรือความยาวทีละบรรทัด: เขียนข้อความ (สิ่งที่หาได้) คู่กับเหตุผล (สมบัติที่ใช้) เริ่มจากสิ่งที่โจทย์ให้ แล้วถามตัวเองว่า “สมบัติใดเชื่อมสิ่งที่รู้กับสิ่งที่ต้องการ”



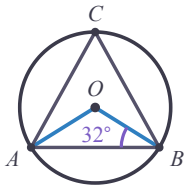
แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ข้อ (1)–(4) เติมคำตอบ · ข้อ (5)–(8) แสดงวิธีทำพร้อมเหตุผล (ข้อ 7 หาค่าที่ถูกด้วย)

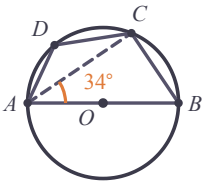
(1) $\angle AOB =$ ☐°

$\angle ACB =$ ☐°



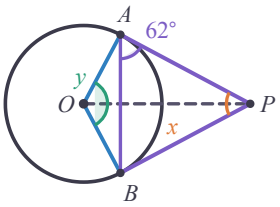
(2) $\angle ABC =$ ☐°

$\angle ADC =$ ☐°



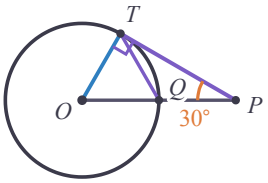
(3) $x =$ ☐°

$y =$ ☐°



(4) $\angle TOP =$ ☐°

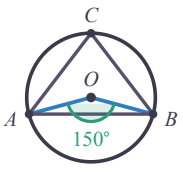
$\triangle OTQ$ เป็นสามเหลี่ยม ☐



(5) $AB = CD$ เป็นคอร์ดของวงกลมจุดศูนย์กลาง O $\angle AOB = 80°$ และ E อยู่บนส่วนโค้งใหญ่ CD จงหา $\angle CED$

(6) $ABCD$ แนบในวงกลม $AB = AD$ และ $\angle BCD = 110°$ จงหา $\angle ABD$

(7) ปิยะเขียนว่า “$\angle ACB = 90°$ เพราะ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง” ผิดตรงไหน



(8) PT สัมผัสวงกลมรัศมี 6 ซม. ที่ T และ $PT = 8$ ซม. OP ตัดวงกลมที่ Q จงหา PQ

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 90 , มุมในครึ่งวงกลม , 62 , 62 , 56

โจทย์ข้อ 2 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส , 140 , มุมภายในรูปสี่เหลี่ยมรวมกัน 360° , 70 , มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง

ระวัง! เรียกชื่อมุมด้วยตัวอักษร 3 ตัว ตัวกลางคือจุดยอด เช่น $\angle ACB$ · ถ้าเขียน “มุม C” อาจหมายถึงหลายมุมที่จุด C



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 3 เส้นสัมผัส

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

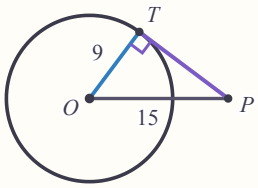
_____

/ 100



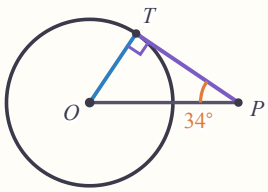
1 10 คะแนน

PT สัมผัสวงกลมที่ T รัศมี 9 ซม. $OP = 15$ ซม. จงหา PT



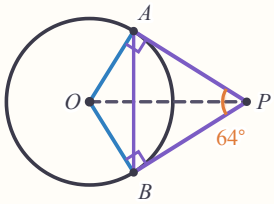
2 10 คะแนน

PT สัมผัสวงกลมที่ T และ $\angle OPT = 34°$ จงหา $\angle TOP$



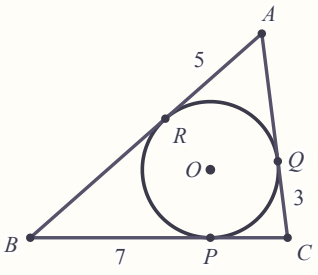
3 10 คะแนน

PA, PB สัมผัสวงกลม $\angle APB = 64°$ จงหา $\angle PAB$ และ $\angle AOB$



4 10 คะแนน

วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัสด้านที่ P, Q, R จงหา CA และความยาวรอบรูป

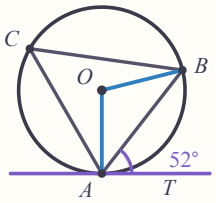


5 10 คะแนน

รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีวงกลมแนบใน $AB = 8, BC = 11, CD = 13$ ซม. จงหา DA

6 10 คะแนน

TA สัมผัสวงกลมที่ A และ $\angle TAB = 52°$ จงหา $\angle ACB$ และ $\angle AOB$

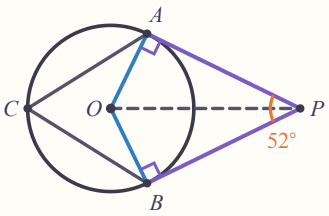


7 10 คะแนน

PT สัมผัสวงกลมรัศมี 5 ซม. ที่ T และ $PT = 12$ ซม. OP ตัดวงกลมที่ Q จงหา OP และ PQ

8 10 คะแนน

PA, PB สัมผัสวงกลม $\angle APB = 52°$ C อยู่บนส่วนโค้งใหญ่ AB จงหา $\angle ACB$ พร้อมเหตุผลทุกบรรทัด



9 10 คะแนน

ต้นกล้าหาความยาวเส้นสัมผัส PT จากวงกลมรัศมี 6 ซม. เมื่อ $OP = 10$ ซม. ได้ $PT = \sqrt{(10^2 + 6^2)} = \sqrt{136}$ ต้นกล้าผิดตรงไหน คำตอบที่ถูกคือเท่าใด

10 10 คะแนน

สระน้ำกลมรัศมี 9 ม. จากหลัก P ขึงเชือกสัมผัสขอบสระ 2 เส้น PA และ PB ยาวเส้นละ 12 ม. (ก) หลัก P ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่าใด (ข) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $OAPB$ เท่าใด

ก้าวสู่ชั้นมัธยมฯ

วงกลมรอบตัว

ล้อกับถนน สายพานกับรอก ดาวเทียมกับขอบฟ้า ล้วนเป็นเส้นสัมผัส · สมบัติในเล่มนี้จะได้ใช้อีกในอัตราส่วนตรีโกณมิติ และเรขาคณิตวิเคราะห์ ม.4



เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

01 ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม

(1) 18 (2) 7.5 (3) เส้นผ่านศูนย์กลาง , รัศมี , คอร์ด (4) มุมที่จุดศูนย์กลาง , มุมในส่วนโค้ง , KL

(5) เส้นผ่านศูนย์กลาง , 12 (6) รูปในฉบับครู (7) รัศมี , 60

(8) ไม่ได้ เพราะคอร์ดยาวที่สุด (เส้นผ่านศูนย์กลาง) ยาว 10 ซม.

02 มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง

(1) 40 (2) 108 (3) 115 (4) 30 (5) 65 (6) 60 , 30 (7) 94 (8) 110°

03 มุมในครึ่งวงกลม

(1) 55 (2) 30 (3) 45 (4) 13 , 6.5 (5) BC = 24 ซม. พื้นที่ 120 ตร.ซม. (6) $5\sqrt{2}$ ซม. (7) 9

(8) เป็น รัศมี 8.5 ซม.

04 มุมในส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน

(1) 70 (2) 64 , 128 (3) 42 , 63 (4) 15 , 50 (5) 62 (6) 50

(7) ผิด C กับ D อยู่คนละข้างของ AB · $\angle ADB = 115°$ (8) $x = 20$, $\angle ACB = 50°$

05 รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

(1) 82 (2) 110 , 85 (3) 85 (4) 50 , 100 (5) 70 , 110 (6) 100

(7) ได้ เพราะมุมตรงข้ามรวมกัน 180° ทั้งสองคู่ (8) $\angle A = 72°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 108°$, $\angle D = 70°$

06 เส้นตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งคอร์ด

(1) 3 (2) 30 (3) 13 (4) 48 (5) $2\sqrt{5}$ ซม. (6) 8 ซม. (7) 2 ซม. (อยู่ข้างเดียวกัน) หรือ 14 ซม. (อยู่คนละข้าง)

(8) 10 ม.

เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

07 คอร์ดยาวเท่ากัน

(1) 4 (2) 24 , 13 (3) 84 , 48 (4) 60 , 6 (5) 30 , 7 (6) CD ห่าง 6 ซม. (AB ห่าง 8 ซม.) (7) 110°

(8) ไม่จริงเสมอ เช่น เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมรัศมี 5 กับ 10 ซม.

08 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี

(1) 15 (2) 25 (3) 6 (4) 63 (5) 8 , 12 (6) 90 , 30 (7) $4\sqrt{3}$ ซม. (8) 24 ม.

09 เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกยาวเท่ากัน

(1) 24 (2) 130 (3) 65 (4) 40 , 20 (5) 9 , 30 (6) 7 ซม. (7) 2 ซม.

(8) ผิด มุมที่เท่ากันคือ $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ · $\angle AOB = 120°$

10 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด

(1) 58 (2) 64 , 116 (3) 30 (4) 40 , 50 (5) 65 (6) $x = 20$ (มุมละ 60°) (7) 70°

(8) $\angle ACB = 72°$, $\angle ADB = 108°$

11 โจทย์ผสมและการให้เหตุผล

(1) 116 , 58 (2) 56 , 124 (3) 56 , 124 (4) 60 , ด้านเท่า (5) 40° (6) 55°

(7) AB ไม่ผ่าน O · $\angle ACB = 75°$ (8) 4 ซม.

บันทึกความก้าวหน้าของฉัน

ทำเสร็จแล้วกา ✓ ในช่อง บทเรียนไหนยังไม่มั่นใจ กาช่องสุดท้ายไว้กลับมาทบทวน

บทเรียน	เรียนหน้าซ้าย	ทำแบบฝึก	ทำถูก	อยากทบทวน
บทที่ 1 มุมในวงกลม				
01 ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม	☐	☐	____ / 8	☐
02 มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2 × มุมในส่วนโค้ง	☐	☐	____ / 8	☐
03 มุมในครึ่งวงกลม	☐	☐	____ / 8	☐
04 มุมในส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน	☐	☐	____ / 8	☐
05 รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1			____ / 100	☐
บทที่ 2 คอร์ด				
06 เส้นตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งคอร์ด	☐	☐	____ / 8	☐
07 คอร์ดยาวเท่ากัน	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2			____ / 100	☐
บทที่ 3 เส้นสัมผัส				
08 เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี	☐	☐	____ / 8	☐
09 เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกยาวเท่ากัน	☐	☐	____ / 8	☐
10 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด	☐	☐	____ / 8	☐
11 โจทย์ผสมและการให้เหตุผล	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3			____ / 100	☐



ครบทุกช่องแล้ว เก่งมาก! สมบัติของวงกลมจะได้ใช้อีกในอัตราส่วนตรีโกณมิติ และเรขาคณิตวิเคราะห์ ม.4

บันทึก

One by One
Step by Step

เรียนทีละบท ฝึกทีละขั้น

หนังสือชุด One by One ม.3

1. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง
3. สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. ความคล้าย
5. กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
6. สถิติ (3) แผนภาพกล่อง
7. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
8. **วงกลม**
9. พีระมิด กรวย และทรงกลม
10. ความน่าจะเป็น
11. อัตราส่วนตรีโกณมิติ



Math Step Studio
mathstepstudio.com