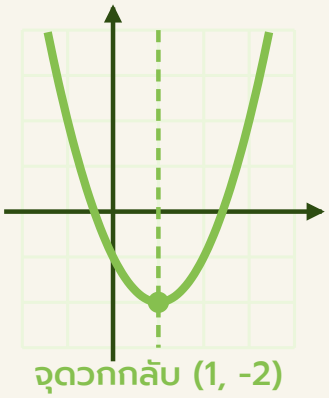
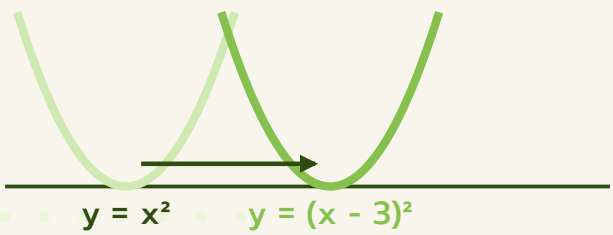
ONE BY ONE
STEP BY STEP



กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ม.3

10 บทเรียน · ฉบับนักเรียน









ชื่อ _____ นามสกุล _____

ชั้น ม.3/ _____ เลขที่ _____

สารบัญ

บทที่ 1 รู้จักพาราโบลา

01 ฟังก์ชันกำลังสอง	4
02 กราฟของ $y = ax^2$	6
03 จุดวกกลับ แกนสมมาตร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	8
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1	10

บทที่ 2 การเลื่อนกราฟ

04 กราฟของ $y = ax^2 + k$	12
05 กราฟของ $y = a(x - h)^2$	14
06 กราฟของ $y = a(x - h)^2 + k$	16
07 กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$	18
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2	20

บทที่ 3 อ่านกราฟและนำไปใช้

08 จุดตัดแกน X และแกน Y	22
09 หาสมการจากกราฟ	24
10 โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	26
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3	28
เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น	30
บันทึกความก้าวหน้าของฉัน	32

ใช้เล่มนี้อย่างไร

ทุกบทเรียนมี 2 หน้า วางโครงเหมือนกันทุกบท เรียนทีละเรื่อง ทีละขั้น

1 หน้าซ้าย · เรียนรู้ผ่านโจทย์

อ่านโจทย์ข้อ 1 และ 2 ดูกราฟหรือตาราง แล้วเติมคำตอบลงในช่องทีละขั้น เพื่อค้นพบวิธีคิดด้วยตัวเอง

2 ก้าวขั้นอีกขั้น

กล่องสีเทาท้ายหน้า บอกเหตุผลเบื้องหลัง ทางลัด หรือเรื่องที่ต่อยอดได้

3 หน้าขวา · สรุป + ฝึก

อ่านแถบสรุปด้านบน ทำแบบฝึกหัดเบื้องต้นเรียงจากง่ายไปยาก แล้วตรวจกับเฉลยโจทย์หน้าซ้ายและเฉลยท้ายเล่ม

4 แบบทดสอบทบทวน

ท้ายแต่ละบท มีคะแนนกำกับทุกข้อ ลองทำโดยไม่เปิดดูบทเรียน แล้วรวมคะแนน

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเล่ม

(h, k)	จุดวกกลับของ $y = a(x-h)^2 + k$
- - -	เส้นประ: แกนสมมาตร หรือกราฟเดิมก่อนเลื่อน
➜	ลูกศรสีส้ม: การเลื่อนกราฟ
$a > 0$ / $a < 0$	กราฟหงาย / กราฟคว่ำ
$b^2 - 4ac$	บอกจำนวนจุดที่กราฟตัดแกน X
☐	ช่องเติมคำตอบ

ทบทวนก่อนเริ่ม

- แทนค่าลบ: $(-3)^2 = 9$ แต่ $-3^2 = -9$
- กระจาย: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
- แยกตัวประกอบ: $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$
- กำลังสองสมบูรณ์: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
- รากที่สอง: $x^2 = 9$ ได้ $x = \pm 3$
- $b^2 - 4ac$ บอกจำนวนคำตอบของ $ax^2 + bx + c = 0$



เล่มนี้ไม่ต้องรีบ ทำทีละบทเรียน ถ้าติดตรงไหน ย้อนไปดูโจทย์ข้อ 1–2 ของบทเรียนนั้นอีกรอบ

01 ฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เรียกว่า**ฟังก์ชันกำลังสอง** กราฟของฟังก์ชันกำลังสองเป็นเส้นโค้งที่เรียกว่า**พาราโบลา** (ม.2 เราเขียนกราฟเส้นตรง $y = 2x$ มาแล้ว)

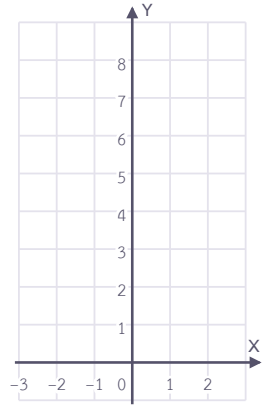
โจทย์ข้อ 1 เขียนกราฟของ $y = x^2$ จากตาราง

1. แทน $x = -2$: $y = (-2)^2 =$ ☐ เท่ากับค่า y เมื่อ $x = 2$ · เติมตารางให้ครบ
2.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	☐	☐	☐	0	1	4	9

3. ลงจุดทั้งเจ็ดจุดแล้วลาก**เส้นโค้งเรียบ**ผ่านทุกจุด จุดต่ำสุดของกราฟคือ (0, ☐)
4. จุด $(-x, y)$ กับ (x, y) อยู่บนกราฟทั้งคู่ กราฟจึงสมมาตรกันโดยมีแกน ☐ เป็นแกนสมมาตร

ลงจุดแล้วลากเส้นโค้ง



โจทย์ข้อ 2 เทียบกับกราฟเส้นตรง $y = 2x$ (ม.2)

1. เติมค่า $y = 2x$ ในตาราง (ค่า x^2 มาจากโจทย์ข้อ 1)
2. x เพิ่มทีละ 1 ค่า $2x$ เพิ่มทีละ ☐ เท่ากันทุกครั้ง จุดจึงเรียงเป็น ☐
3. ค่า x^2 เพิ่มขึ้น 1, 3, ☐ ไม่เท่ากัน จุดจึงเรียงเป็น ☐

ตารางเทียบ

x	0	1	2	3
$y = 2x$	☐	☐	☐	☐
$y = x^2$	0	1	4	9

ก้าวขึ้นอีกขั้น

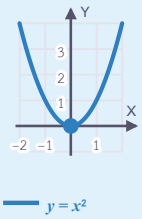
พาราโบลาในชีวิตจริง

สายน้ำพุ ลูกตะกร้อที่เตะขึ้นแล้วตกลง และสายเคเบิลของสะพานแขวน มีรูปร่างเป็นพาราโบลา · ลองตอบ: $y = 3x^2 - 1$ ☐ ฟังก์ชันกำลังสอง · $y = 5x + 2$ ☐ · $y = x(x - 4)$ ☐ (กระจายได้ $x^2 - 4x$)



ฟังก์ชันกำลังสอง คือฟังก์ชัน $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ · กราฟเป็น**พาราโบลา**

เขียนกราฟ: ทำตาราง → ลงจุด → ลาก**เส้นโค้งเรียบ**ผ่านทุกจุด (ไม่ต่อเป็นเส้นหัก) · กราฟ $y = x^2$ สมมาตรรอบแกน Y



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ · ข้อ (6) เขียนกราฟ · ข้อ (7) ตอบว่าอยู่/ไม่อยู่บนกราฟ · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $y = 4 - x^2$ เป็นฟังก์ชันกำลังสองหรือไม่

(2) $y = 3x - 2$ เป็นฟังก์ชันกำลังสองหรือไม่

(3) $y = (x + 2)(x - 3)$ เขียนในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ $y =$ ____ มี $c =$ ____

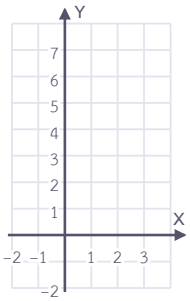
(4) $y = x^2 - 2x$ เติมตาราง

x	−1	0	1	2	3
$x^2 - 2x$					

(5) $y = -x^2$ เติมตาราง

x	−2	−1	0	1	2
$-x^2$			0		

(6) เขียนกราฟของ $y = x^2 - 2x$ จากตารางข้อ (4)



(7) $(3, 9)$ ____ บนกราฟ $y = x^2$ · $(-4, -16)$ ____ บนกราฟนี้

(8) จุด $(k, 4)$ อยู่บนกราฟของ $y = x^2$ จงหาค่า k

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 4 , 9 , 4 , 1 , 0 , Y โจทย์ข้อ 2 2 , เส้นตรง , 5 , เส้นโค้ง , 0 , 2 , 4 , 6

ระวัง! แทนค่าลบต้องใส่วงเล็บ: $x = -3$ ได้ $(-3)^2 = 9$ ไม่ใช่ -9 · ก้นกราฟต้อง**มน** ไม่แหลมเป็นตัว V

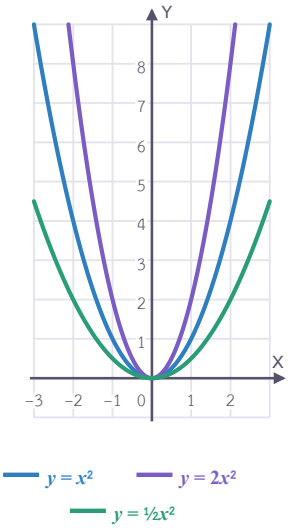


02 กราฟของ $y = ax^2$

กราฟ $y = ax^2$ ทุกกราฟผ่านจุด (0, 0) ค่า a บอก**รูปร่าง**ของกราฟ: หงายหรือคว่ำ แคบหรือกว้าง

โจทย์ข้อ 1 $y = x^2$, $y = 2x^2$ และ $y = \frac{1}{2}x^2$ บนแกนเดียวกัน

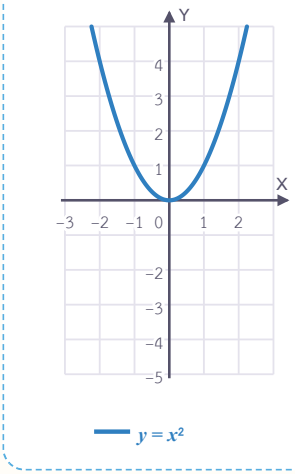
สามกราฟ สามสี



1. แทน $x = 4$ (อยู่นอกภาพ): $y = x^2$ ได้ 16 · $y = 2x^2$ ได้ [ ] · $y = \frac{1}{2}x^2$ ได้ [ ]
2. x เท่ากัน ค่า $2x^2$ เป็น [ ] เท่าของ x^2 กราฟ $y = 2x^2$ จึงชันกว่า ดู [ ] กว่า
3. ส่วน $y = \frac{1}{2}x^2$ ได้ค่าครึ่งเดียว กราฟจึง [ ] กว่า $y = x^2$ · ทั้งสามกราฟเป็นกราฟ [ ]

โจทย์ข้อ 2 กราฟของ $y = -x^2$

สะท้อนกับแกน X



1. เติมตาราง: ค่า $-x^2$ เป็นจำนวนตรงข้ามของ x^2 แล้วลงจุดและลากเส้นโค้ง
2.

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$-x^2$	[ ]	[ ]	0	[ ]	[ ]

3. กราฟ $y = -x^2$ เป็นภาพสะท้อนของ $y = x^2$ โดยมีแกน [ ] เป็นเส้นสะท้อน
4. กราฟ [ ] จุดสูงสุดคือ ([ ] , [ ])

ก้าวขึ้นอีกขั้น

|a| มาก กราฟยิ่งแคบ

$y = 3x^2$ กับ $y = -3x^2$ แคบเท่ากัน เพราะ $|a|$ = [ ] เท่ากัน ต่างกันแค่หงายกับคว่ำ · $y = 0.1x^2$ กว้างมากจนเกือบแบน · ถ้า $a = 0$ จะเหลือ $y = 0$ ซึ่งเป็น [ ] (แกน X) จึงต้องมี $a \neq 0$



กราฟ $y = ax^2$ ผ่านจุด (0, 0) เสมอ · $a > 0$ กราฟ**หงาย** · $a < 0$ กราฟ**คว่ำ**

$|a|$ มาก กราฟ**แคบ** · $|a|$ น้อย กราฟ**กว้าง** · $y = ax^2$ กับ $y = -ax^2$ สะท้อนกันโดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

a	กราฟ
$a > 0$	หงาย ∪
$a < 0$	คว่ำ ∩
$\|a\|$ มาก	แคบ
$\|a\|$ น้อย	กว้าง

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ · ข้อ (6) เขียนกราฟ · ข้อ (7) แสดงวิธีทำ

(1) $y = 5x^2$ เป็นกราฟ ☐ · $y = -\frac{1}{3}x^2$ เป็นกราฟ ☐

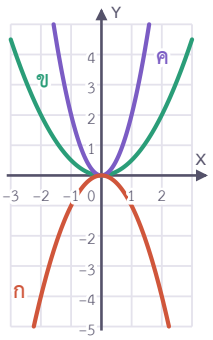
(2) เรียงจากแคบไปกว้าง: $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$

☐

(3)

จับคู่สมการกับกราฟ ก ข ค ในภาพ

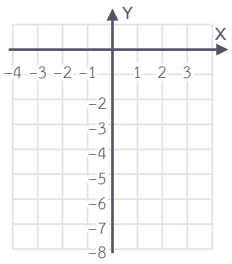
$y = 2x^2$ คือกราฟ ☐ · $y = \frac{1}{2}x^2$ คือกราฟ ☐ · $y = -x^2$ คือกราฟ ☐



(4) จุด (2, 12) อยู่บนกราฟ $y = ax^2$ จะได้ a = ☐ · จุด (−2, −2) อยู่บนกราฟ $y = ax^2$ จะได้ a = ☐

(5) กราฟ $y = ax^2$ ที่ผ่านจุด (1, 4) มี a = ☐ จึง ☐ กว่ากราฟ $y = x^2$

(6) เขียนกราฟของ $y = -\frac{1}{2}x^2$ (ใช้ x = −4, −2, 0, 2, 4)



(7) กราฟ $y = ax^2$ ผ่านจุด (3, 18) จงหาค่า a และค่า y เมื่อ $x = -2$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 32 , 8 , 2 , แคบ , กว้าง , หงาย โจทย์ข้อ 2 −4 , −1 , −1 , −4 , X , คว่ำ , 0 , 0

ระวัง! $y = -x^2$ กับ $y = (-x)^2$ ไม่เหมือนกัน: ที่ $x = 3$ ได้ $-x^2$ = ☐ แต่ $(-x)^2$ = ☐ · $(-x)^2 = x^2$ จึงเป็นกราฟหงาย



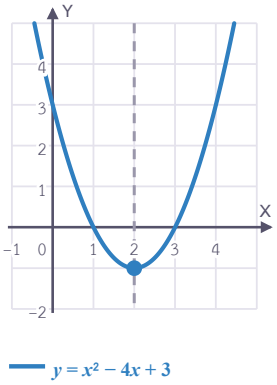
03 จุดวกกลับ แกนสมมาตร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

พาราโบลาทุกรูปมีจุดที่กราฟ “วกกลับ” เรียกว่า**จุดวกกลับ** และมีเส้นตรงแนวตั้งผ่านจุดวกกลับ แบ่งกราฟเป็นสองซีกที่พับทับกันพอดี เรียกว่า**แกนสมมาตร** (เส้นประในภาพ)

โจทย์ข้อ 1 อ่านกราฟหงาย $y = x^2 - 4x + 3$

1. จุดต่ำสุดของกราฟคือจุดวกกลับ อ่านพิกัดได้ (☐, ☐)
2. แกนสมมาตรเป็นเส้นตรงแนวตั้ง มีสมการ $x =$ ☐
3. กราฟหงาย ค่าต่ำสุดของ y คือ ☐ เกิดเมื่อ $x =$ ☐
4. จุด (0, 3) อยู่บนกราฟ จุดที่สมมาตรกับจุดนี้คือ (☐, 3)

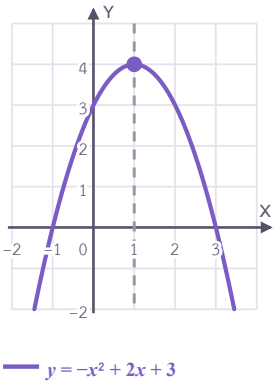
กราฟหงาย



โจทย์ข้อ 2 อ่านกราฟคว่ำ $y = -x^2 + 2x + 3$

1. กราฟคว่ำ จุดวกกลับเป็นจุด☐ของกราฟ คือ (☐, ☐)
2. แกนสมมาตร $x =$ ☐
3. ค่าสูงสุดของ y คือ ☐ · ค่าต่ำสุด☐เพราะกราฟลงไปได้เรื่อย ๆ

กราฟคว่ำ



ก้าวขึ้นอีกขั้น

สองจุดที่ y เท่ากัน แกนสมมาตรอยู่ตรงกลาง

กราฟผ่าน (−1, 5) และ (5, 5) แกนสมมาตรคือ $x = \dfrac{-1+5}{2} =$ ☐ · กราฟตัดแกน X ที่ $x = 1$ และ $x = 7$ แกนสมมาตรคือ $x =$ ☐



จุดวกกลับ: กราฟหงายเป็นจุดต่ำสุด ได้**ค่าต่ำสุด** = ค่า y ของจุดวกกลับ · กราฟคว่ำเป็นจุดสูงสุด ได้**ค่าสูงสุด**

แกนสมมาตรคือเส้นตรง x = (ค่า x ของจุดวกกลับ) · สองจุดบนกราฟที่มีค่า y เท่ากันอยู่ห่างแกนสมมาตรเท่ากัน



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

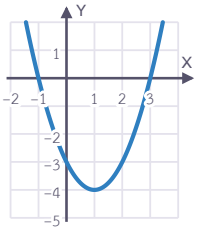
ข้อ (1)–(4) อ่านจุดวกกลับจากกราฟ และบอกว่ามีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด · ข้อ (5) เติมคำตอบ · ข้อ (6) แสดงวิธีทำ

(1) $y = x^2 - 2x - 3$

จุดวกกลับ

(☐ , ☐)

กราฟมีค่า ☐

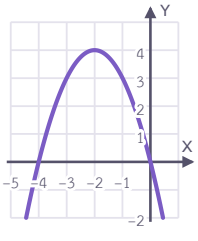


(2) $y = -x^2 - 4x$

จุดวกกลับ

(☐ , ☐)

กราฟมีค่า ☐

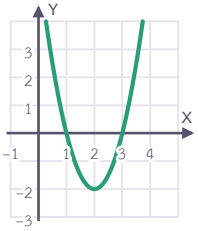


(3) $y = 2x^2 - 8x + 6$

จุดวกกลับ

(☐ , ☐)

กราฟมีค่า ☐

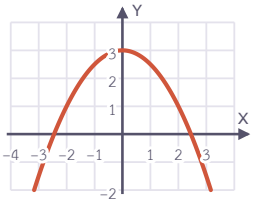


(4) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

จุดวกกลับ

(☐ , ☐)

กราฟมีค่า ☐



(5) จุด $(-3, 7)$ และ $(5, 7)$ อยู่บนพาราโบลาเดียวกัน แกนสมมาตรคือ x = ☐ · พาราโบลาตัดแกน X ที่ $x = -4$ และ $x = 2$ แกนสมมาตรคือ x = ☐

(6) พาราโบลามีแกนสมมาตร $x = 2$ และผ่านจุด $(0, 6)$ จงหาอีกจุดหนึ่งบนกราฟที่มี $y = 6$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 2 , −1 , 2 , −1 , 2 , 4 โจทย์ข้อ 2 สูงสุด , 1 , 4 , 1 , 4 , ไม่มี

ระวัง! ค่าต่ำสุด/ค่าสูงสุดคือค่าของ y ไม่ใช่ x: จุดวกกลับ $(2, -1)$ มีค่าต่ำสุด -1 ซึ่งเกิดเมื่อ $x = 2$



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 1 รู้จักพาราโบลา

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

_____

/ 100



1 10 คะแนน

เติมตารางของ $y = x^2 + 2x$

x	−3	−2	−1	0	1
$x^2 + 2x$					

2 10 คะแนน

ข้อใดเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (ก) $y = (x-1)^2 - x^2$ (ข) $y = x(3-x)$

3 10 คะแนน

กราฟของ $y = ax^2$ ผ่านจุด $(-2, 12)$ จงหาค่า a และบอกว่ากราฟหงายหรือคว่ำ

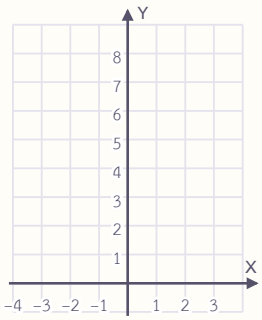
4 10 คะแนน

เรียงกราฟจากแคบไปกว้าง และบอกว่ากราฟใดคว่ำ: $y = -4x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$

5 10 คะแนน

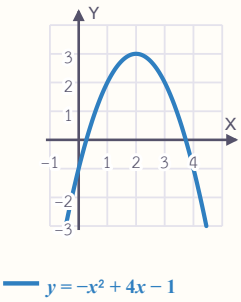
เขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2}x^2$

x	−4	−2	0	2	4
$\frac{1}{2}x^2$					



6
10 คะแนน

จากกราฟของ $y = -x^2 + 4x - 1$ จงหาจุดวกกลับ แกนสมมาตร และค่าสูงสุด

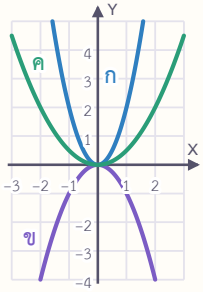


7
10 คะแนน

จุด $(-1, 4)$ และ $(7, 4)$ อยู่บนพาราโบลาเดียวกัน จงหาสมการแกนสมมาตร

8
10 คะแนน

จับคู่สมการกับกราฟ (มีสมการเกิน 1 ข้อ): $y = \frac{1}{2}x^2$ · $y = -2x^2$ · $y = 2x^2$ · $y = -x^2$



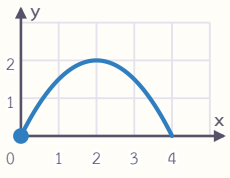
9
10 คะแนน

น้ำฝนบอกว่า “กราฟ $y = -3x^2$ กว้างกว่ากราฟ $y = x^2$ เพราะ $-3 < 1$” น้ำฝนพูดถูกหรือไม่ เพราะอะไร

10
10 คะแนน

สายน้ำพุพุ่งเป็นรูปพาราโบลา $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ (x, y เป็นเมตร หัวน้ำพุอยู่ที่ $(0, 0)$)

(ก) น้ำพุ่งสูงสุดกี่เมตร (ข) ตอนสูงสุดอยู่ห่างหัวน้ำพุในแนวนอนกี่เมตร (ค) น้ำตกถึงพื้นห่างจากหัวน้ำพุกี่เมตร



ก้าวต่อไปสู่เรื่องใหม่

ต่อไป: เลื่อนกราฟ

กราฟ $y = x^2 + 3$ คือกราฟ $y = x^2$ ทั้งเส้นที่ยกขึ้นไป 3 หน่วย ส่วน $y = (x - 3)^2$ เลื่อนไปทางขวา 3 หน่วย บทต่อไปจะใช้การเลื่อนนี้หาจุดวกกลับโดยไม่ต้องทำตาราง



04 กราฟของ $y = ax^2 + k$

บวกค่าคงตัว k เข้าไปทุกค่า y ทุกจุดบนกราฟจึงเลื่อนขึ้นหรือลงเท่ากันหมด รูปร่างของกราฟไม่เปลี่ยน (ในภาพ: เส้นประสีเทาคือกราฟเดิม ลูกศรสีส้มคือการเลื่อน)

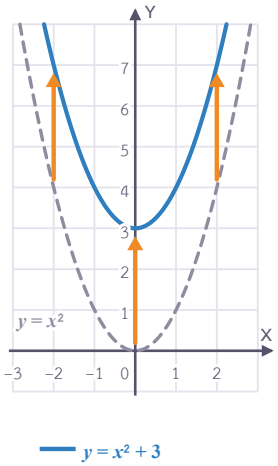
โจทย์ข้อ 1 กราฟของ $y = x^2 + 3$

1. เติมตาราง เทียบกับค่า x^2
2.

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 3$					

3. ทุกจุดของกราฟ $y = x^2$ เลื่อน ____ ____ หน่วย
4. จุดวกกลับเลื่อนจาก (0, 0) ไปที่ (____, ____) แกนสมมาตรยังเป็น x = ____ (แกน Y)

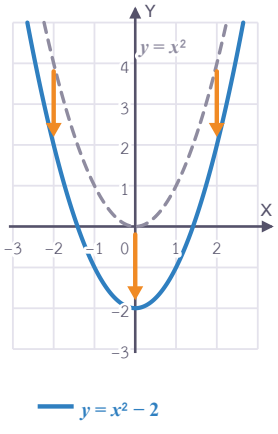
เลื่อนขึ้น



โจทย์ข้อ 2 กราฟของ $y = x^2 - 2$

1. ค่า y ทุกค่าน้อยกว่า x^2 อยู่ 2 กราฟจึงเลื่อน ____ ____ หน่วย
2. จุดวกกลับ (____, ____) ค่าต่ำสุด = ____
3. ถ้า $x = 3$ จะได้ y = ____

เลื่อนลง



ก้าวขึ้นอีกขั้น

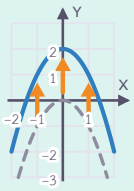
กราฟคว่ำก็เลื่อนได้

$y = -x^2 + 4$ คือ $y = -x^2$ ที่เลื่อนขึ้น 4 หน่วย จุดวกกลับ (____, ____) มีค่า ____ = 4 ตัดแกน X เมื่อ $-x^2 + 4 = 0$ ได้ x = ____ หรือ ____ · ค่า a ไม่เปลี่ยน รูปร่างจึงเหมือนเดิม



กราฟ $y = ax^2 + k$ คือกราฟ $y = ax^2$ ที่เลื่อน**ขึ้น** k หน่วย เมื่อ $k > 0$ หรือเลื่อน**ลง** $|k|$ หน่วย เมื่อ $k < 0$

จุดวกกลับ $(0, k)$ · แกนสมมาตร $x = 0$ (แกน Y) · หงาย/คว่ำ แคบ/กว้าง เหมือน $y = ax^2$ ทุกอย่าง



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(5) และ (7) เติมคำตอบ · ข้อ (6) เขียนกราฟ · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $y = x^2 + 5$: เลื่อนกราฟ $y = x^2$

[ ] [ ] หน่วย จุดวกกลับ ([ ] , [ ])

(2) $y = -2x^2 - 3$: เลื่อนกราฟ $y = -2x^2$

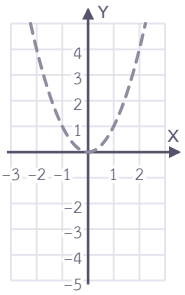
[ ] [ ] หน่วย จุดวกกลับ ([ ] , [ ]) ค่า [ ] = [ ]

(3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$: จุดวกกลับ ([ ] , [ ]) ค่า [ ] = [ ]

(4) เลื่อนกราฟ $y = 3x^2$ ขึ้น 2 หน่วย ได้ $y =$ [ ]

(5) เลื่อนกราฟ $y = -x^2$ ลง 6 หน่วย ได้ $y =$ [ ]

(6) เขียนกราฟของ $y = x^2 - 4$ (เส้นประคือ $y = x^2$)



(7) กราฟ $y = x^2 + k$ ผ่านจุด $(2, 1)$ จะได้ $k =$ [ ]

(8) กราฟของ $y = -x^2 + 9$ ตัดแกน X ที่จุดใดบ้าง

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 7 , 4 , 3 , 4 , 7 , ขึ้น , 3 , 0 , 3 , 0 **โจทย์ข้อ 2** ลง , 2 , 0 , −2 , −2 , 7

ระวัง! +3 ท้ายสมการทำให้กราฟ**เลื่อนขึ้น**ทั้งเส้น ไม่ได้ทำให้กราฟกว้างขึ้น ความแคบ/กว้างขึ้นกับ a เท่านั้น



05 กราฟของ $y = a(x - h)^2$

ถ้าค่าคงตัวอยู่**ในวงเล็บ**กับ x กราฟจะเลื่อนไปทางซ้ายหรือขวา หาทิศจาก “x เท่าไรทำให้วงเล็บเป็น 0”

โจทย์ข้อ 1 กราฟของ $y = (x - 3)^2$

1 เติมตาราง

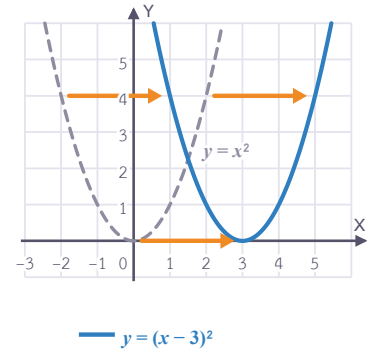
2

x	1	2	3	4	5
$(x-3)^2$					

3 $y = 0$ เมื่อ $x =$ ☐ เพราะวงเล็บ $x - 3$ เป็น 0 จุดวกกลับจึงเป็น (☐, ☐)

4 เทียบกับ $y = x^2$ (จุดวกกลับ (0, 0)): กราฟเลื่อนไปทาง ☐ ☐ หน่วย

เลื่อนไปทางขวา



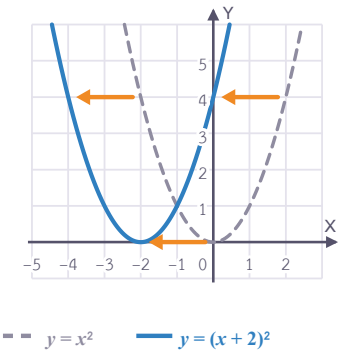
โจทย์ข้อ 2 กราฟของ $y = (x + 2)^2$

1 วงเล็บ $x + 2$ เป็น 0 เมื่อ $x =$ ☐ จุดวกกลับ (☐, ☐)

2 กราฟเลื่อนไปทาง ☐ ☐ หน่วย แกนสมมาตร $x =$ ☐

3 เขียน $x + 2$ เป็น $x - (-2)$ จะได้รูป $(x - h)^2$ ที่มี $h =$ ☐

เลื่อนไปทางซ้าย



ก้าวขึ้นอีกขั้น

กับดัก! $(x - 3)^2$ เลื่อนไปทางขวา

$y = x^2$ ต่ำสุดเมื่อ $x = 0$ แต่ $(x - 3)^2$ ต้องใช้ $x =$ ☐ วงเล็บจึงเป็น 0 ทุกค่า y เดิมต้องใช้ x ที่มากขึ้น 3 กราฟจึงไป**ขวา** · จำ: ในวงเล็บ **ลบ** → **ขวา** · **บวก** → **ซ้าย** (สวนกับความรู้สึก)



กราฟ $y = a(x-h)^2$ คือกราฟ $y = ax^2$ ที่เลื่อนไปทาง**ขวา** h หน่วย เมื่อ $h > 0$ หรือไปทาง**ซ้าย** $|h|$ หน่วย เมื่อ $h < 0$

จุดวกกลับ $(h, 0)$ อยู่บนแกน X · แกนสมมาตร $x = h$

$(x-3)^2$ ➜ ขวา 3
$(x+3)^2$ ➜ ซ้าย 3
$x^2 - 3$ ➜ ลง 3

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(5) เติมคำตอบ · ข้อ (6) เขียนกราฟ · ข้อ (7) แสดงวิธีทำ

(1) $y = (x-5)^2$: เลื่อน $y = x^2$ ไปทาง ☐ ☐ หน่วย จุดวกกลับ (☐, ☐)

(2) $y = (x+4)^2$: เลื่อน $y = x^2$ ไปทาง ☐ ☐ หน่วย จุดวกกลับ (☐, ☐)

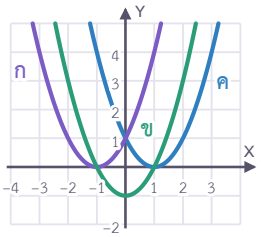
(3) $y = -2(x-1)^2$: จุดวกกลับ (☐, ☐) แกนสมมาตร $x =$ ☐ ค่า ☐ = ☐

(4) เลื่อนกราฟ $y = 2x^2$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย ได้ $y =$ ☐

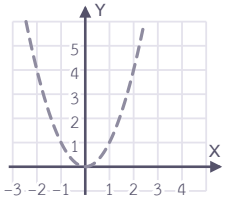
(5) จับคู่สมการกับกราฟ ก ข ค ในภาพ

$y = (x-1)^2$ คือกราฟ ☐ · $y = (x+1)^2$ คือกราฟ ☐ ·

$y = x^2 - 1$ คือกราฟ ☐



(6) เขียนกราฟของ $y = (x-2)^2$ (เส้นประคือ $y = x^2$)



(7) กราฟ $y = a(x-h)^2$ มีแกนสมมาตร $x = 2$ และผ่านจุด (0, 8) จงหาสมการ

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 3 , 3 , 0 , ขวา , 3

โจทย์ข้อ 2 -2 , −2 , 0 , ซ้าย , 2 , −2 , −2

ระวัง! $y = x^2 - 3$ (เลื่อน**ลง** 3) กับ $y = (x-3)^2$ (เลื่อนไปทาง**ขวา** 3) ต่างกัน: ดูว่า −3 อยู่**ในวงเล็บ**หรือ**นอกวงเล็บ**



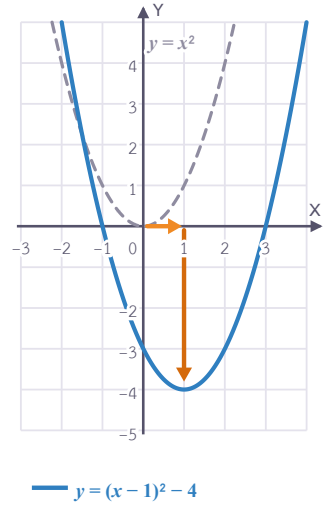
06 กราฟของ $y = a(x - h)^2 + k$

รวมสองบทเรียนที่แล้ว: ค่าในวงเล็บเลื่อนกราฟ**ซ้าย–ขวา** ค่านอกวงเล็บเลื่อน**ขึ้น–ลง** เลื่อนทีละขั้นแล้วได้จุดวกกลับทันที

โจทย์ข้อ 1 กราฟของ $y = (x - 1)^2 - 4$

1. ขั้นที่ 1 จาก $(x - 1)^2$: เลื่อนกราฟ $y = x^2$ ไปทาง [ ] [ ] หน่วย
2. ขั้นที่ 2 จาก -4 นอกวงเล็บ: เลื่อน [ ] [ ] หน่วย จุดวกกลับ ([ ] , [ ])
3. $a = 1 > 0$ กราฟหงาย ค่าต่ำสุด = [ ] แกนสมมาตร x = [ ]

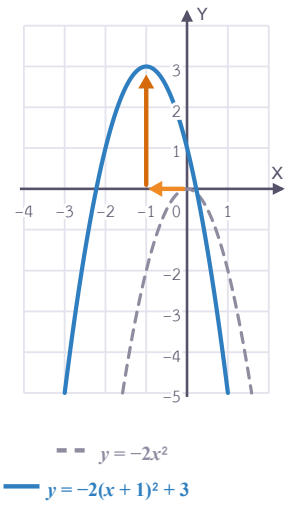
ลูกศรสองช่วงต่อกัน



โจทย์ข้อ 2 กราฟของ $y = -2(x + 1)^2 + 3$

1. เลื่อนกราฟ $y = -2x^2$ ไปทาง [ ] [ ] หน่วย แล้ว [ ] [ ] หน่วย
2. จุดวกกลับ ([ ] , [ ]) แกนสมมาตร x = [ ]
3. $a = -2 < 0$ กราฟ [ ] ค่าสูงสุด = [ ]

ลูกศรสองช่วงต่อกัน



ก้าวขึ้นอีกขั้น

a บอกหงาย/คว่ำ h กับ k บอกตำแหน่ง

$y = 5(x - 2)^2 + 1$ กับ $y = -(x - 2)^2 + 1$ มีจุดวกกลับเดียวกันคือ $(2, 1)$ แต่ตัวแรกมีค่า [ ] $= 1$ ตัวหลังมีค่า [ ] $= 1 \cdot a > 0$ ค่าต่ำสุด $= k \cdot a < 0$ ค่าสูงสุด $= k$



กราฟ $y = a(x-h)^2 + k$ คือกราฟ $y = ax^2$ ที่เลื่อนในแนวนอน $|h|$ หน่วย (ขวาเมื่อ $h > 0$) แล้วเลื่อนในแนวตั้ง $|k|$ หน่วย (ขึ้นเมื่อ $k > 0$)

จุดวกกลับ (h, k) · แกนสมมาตร $x = h$ · $a > 0$ ค่าต่ำสุด $= k$ · $a < 0$ ค่าสูงสุด $= k$

สมการ	จุดวกกลับ
$y = ax^2$	$(0, 0)$
$y = ax^2 + k$	$(0, k)$
$y = a(x-h)^2$	$(h, 0)$
$y = a(x-h)^2 + k$	(h, k)

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(6) เติมคำตอบ · ข้อ (7) เขียนกราฟ · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $y = (x-2)^2 + 1$: จุดวกกลับ

(☐ , ☐) ค่า ☐ = ☐

(2) $y = (x+3)^2 - 5$: จุดวกกลับ

(☐ , ☐) แกนสมมาตร $x =$ ☐

(3) $y = -(x-4)^2 + 2$: จุดวกกลับ

(☐ , ☐) ค่า ☐ = ☐

(4) $y = 3(x+1)^2 + 7$: จุดวกกลับ

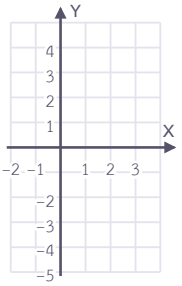
(☐ , ☐) ค่า ☐ = ☐

(5) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$: จุดวกกลับ

(☐ , ☐) กราฟ ☐

(6) พาราโบลา $y = a(x-h)^2 + k$ ที่มี $a = 1$ และจุดวกกลับ $(2, -3)$ คือ $y =$ ☐

(7) เขียนกราฟของ $y = -(x-1)^2 + 4$



(8) เลื่อนกราฟ $y = 2x^2$ ไปทางขวา 3 หน่วย แล้วเลื่อนลง 5 หน่วย ได้สมการใด จุดวกกลับอยู่ที่ใด และกราฟตัดแกน Y ที่จุดใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 ขวา , 1 , ลง , 4 , 1 , −4 , −4 , 1 โจทย์ข้อ 2 ซ้าย , 1 , ขึ้น , 3 , −1 , 3 , −1 , คว่ำ , 3

ระวังเครื่องหมาย! $y = (x+1)^2 - 4$ มีจุดวกกลับ $(-1, -4)$ ไม่ใช่ $(1, -4)$: ค่าในวงเล็บ**กลับเครื่องหมาย** ค่านอกวงเล็บใช้ตามเดิม



07 กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$

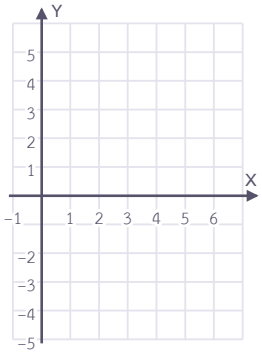
ฟังก์ชันกำลังสองทั่วไปยังไม่บอกจุดวกกลับตรง ๆ ต้องเปลี่ยนเป็นรูป $a(x-h)^2 + k$ ก่อน (ต่อยอดจากเล่มสมการกำลังสอง บทเรียน 06 กำลังสองสมบูรณ์) หรือใช้ทางลัด $x = -b/2a$

โจทย์ข้อ 1 เติมกำลังสองสมบูรณ์ $y = x^2 - 6x + 5$

1. หาครึ่งหนึ่งของ b แล้วยกกำลังสอง (เติมตาราง)
2. เติม 9 แล้วลบ 9: $y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 =$ ☐
3. จุดวกกลับ (☐ , ☐) กราฟหงาย ค่าต่ำสุด = ☐
4. ลงจุดวกกลับ แล้วร่างกราฟผ่านจุด (1, 0), (5, 0) ที่ $y = 0$

เติมกำลังสอง แล้วร่างกราฟ

	ค่า
b	-6
$b \div 2$	
$(b \div 2)^2$	



โจทย์ข้อ 2 ใช้ทางลัด $x = -b/2a$ กับ $y = 2x^2 + 8x + 3$

1. $a = 2, b = 8$: $x = \dfrac{-8}{2 \times 2} =$ ☐
2. แทน $x = -2$: $y = 2(-2)^2 + 8(-2) + 3 =$ ☐ จุดวกกลับ (☐ , ☐)
3. ตรวจกับโจทย์ข้อ 1: $-b/2a = \dfrac{-(-6)}{2 \times 1} =$ ☐ ตรงกับที่เติมกำลังสอง ✓

ทางลัด 4 ขั้น

① อ่าน a, b

② $x = \dfrac{-b}{2a}$

③ แทนค่า x หา y

④ ได้จุดวกกลับ (x, y)

ก้าวขึ้นอีกขั้น

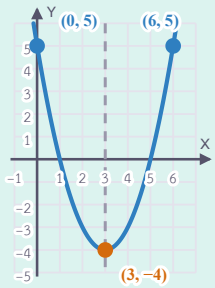
จุดตัดแกน Y คือ (0, c) ทันที

แทน $x = 0$ ใน $y = x^2 - 6x + 5$ ได้ (0, ☐) และเพราะแกนสมมาตรคือ $x = 3$ จุด (☐ , 5) ก็อยู่บนกราฟด้วย ได้จุดวกกลับกับอีกสองจุดก็ร่างกราฟได้แล้ว



หาจุดวกกลับของ $y = ax^2 + bx + c$ ได้ 2 วิธี: ① **เติมกำลังสองสมบูรณ์**ให้เป็น $y = a(x-h)^2 + k$ ② ใช้ $x = -b/2a$ แล้ว**แทนค่า**หา y

กราฟตัดแกน Y ที่ $(0, c)$ · $a > 0$ หงาย มีค่าต่ำสุด · $a < 0$ คว่ำ มีค่าสูงสุด



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(7) เติมคำตอบ · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $y = x^2 + 4x + 1$ เขียนเป็น $y =$ ☐ จุดวกกลับ (☐, ☐)

(2) $y = x^2 - 2x + 6$ เขียนเป็น $y =$ ☐ จุดวกกลับ (☐, ☐)

(3) $y = -x^2 + 6x - 4$: $x = -b/2a =$ ☐ จุดวกกลับ (☐, ☐) ค่า ☐ = ☐

(4) $y = 2x^2 - 4x + 7$: จุดวกกลับ (☐, ☐)

(5) $y = -3x^2 - 12x$: จุดวกกลับ (☐, ☐)

(6) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$: จุดวกกลับ (☐, ☐)

(7) กราฟของ $y = 3x^2 - 5x + 8$ ตัดแกน Y ที่จุด (0, ☐)

(8) เขียน $y = x^2 - 8x + 10$ ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ แล้วหาค่าต่ำสุด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 $(x-3)^2 - 4$, 3 , −4 , −4 , −3 , 9 โจทย์ข้อ 2 −2 , −5 , −2 , −5 , 3

ระวัง! b ติดลบ: $y = x^2 - 6x$ มี $b = -6$ ได้ $x = -(-6)/2 = 3$ ไม่ใช่ -3 · ถ้า $a \neq 1$ ให้ดึง a ออกก่อนเติมกำลังสอง: $2x^2 + 8x + 3 = 2(x^2 + 4x) + 3$



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 2 การเลื่อนกราฟ

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

_____

/ 100



1 10 คะแนน

$y = x^2 - 7$ มีจุดวกกลับที่ใด และได้จากการเลื่อนกราฟ $y = x^2$ อย่างไร

2 10 คะแนน

$y = -3x^2 + 2$ กราฟหงายหรือคว่ำ มีจุดวกกลับที่ใด และมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเท่าใด

3 10 คะแนน

$y = (x + 5)^2$ มีจุดวกกลับที่ใด และเลื่อนกราฟ $y = x^2$ ไปทางใดกี่หน่วย

4 10 คะแนน

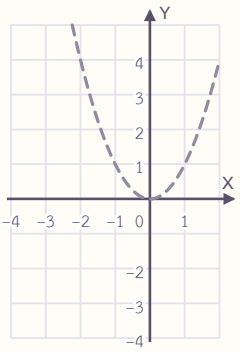
ภูผาบอกว่า “กราฟ $y = (x - 4)^2$ ได้จากการเลื่อนกราฟ $y = x^2$ ไปทางซ้าย 4 หน่วย” ภูผาพูดถูกหรือไม่ เพราะอะไร

5 10 คะแนน

$y = 2(x - 3)^2 - 8$ จงหาจุดวกกลับ แกนสมมาตร และค่าสูงสุดหรือต่ำสุด พร้อมบอกว่ากราฟหงายหรือคว่ำ

6
10 คะแนน

เขียนกราฟของ $y = (x + 1)^2 - 3$ (เส้นประคือ $y = x^2$)



7
10 คะแนน

จงเขียนสมการพาราโบลาในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ ที่มี $a = -1$ และจุดวกกลับ $(-2, 5)$ พร้อมบอกค่าสูงสุด

8
10 คะแนน

จงหาจุดวกกลับของ $y = x^2 + 10x + 21$ โดยเติมกำลังสองสมบูรณ์

9
10 คะแนน

จงหาจุดวกกลับและค่าสูงสุดของ $y = -2x^2 + 12x - 10$

10
10 คะแนน

เลื่อนกราฟ $y = 3x^2$ ไปทางซ้าย 2 หน่วย แล้วเลื่อนขึ้น 1 หน่วย จงเขียนสมการทั้งในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ และรูป $y = ax^2 + bx + c$ แล้วหาจุดที่กราฟตัดแกน Y

ก้าวต่อไปสู่ความรู้ใหม่

ต่อไป: อ่านกราฟและนำไปใช้

รู้จุดวกกลับแล้ว บทต่อไปหาจุดที่กราฟตัดแกน X (ใช้การแก้สมการกำลังสองจากเล่มที่แล้ว) หาสมการจากกราฟ และใช้จุดวกกลับตอบโจทย์ “มากที่สุด” “น้อยที่สุด”



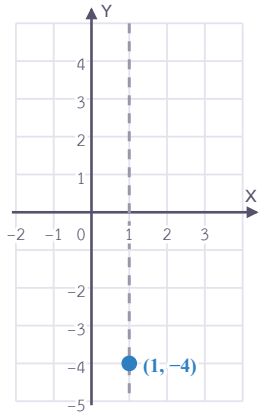
08 จุดตัดแกน X และแกน Y

จุดบนแกน Y มี $x = 0$ จุดบนแกน X มี $y = 0$ · การหาจุดตัดแกน X คือการแก้สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ (ต่อยอดจากเล่มสมการกำลังสอง บทเรียน 04–08)

โจทย์ข้อ 1 กราฟของ $y = x^2 - 2x - 3$ ตัดแกนที่ใดบ้าง

1. ตัดแกน Y: แทน $x = 0$ ได้จุด (0, ☐)
2. ตัดแกน X: แทน $y = 0$ ได้ $x^2 - 2x - 3 = 0$ แยกตัวประกอบ $(x + 1)(x - 3) = 0$ ได้ $x =$ ☐ หรือ $x =$ ☐
3. $b^2 - 4ac =$ ☐ > 0 กราฟจึงตัดแกน X ☐ จุด (เล่มสมการกำลังสอง บทเรียน 08)
4. ลงจุดตัดแกนทั้งสามจุด แล้วร่างกราฟผ่านจุดวกกลับ (1, −4)

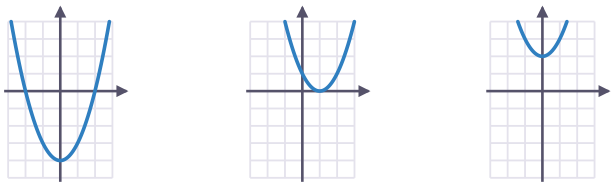
ลงจุดแล้วร่างกราฟ



โจทย์ข้อ 2 กราฟของ $y = x^2 + 2x + 5$

1. $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) =$ ☐ < 0 สมการ $x^2 + 2x + 5 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
2. กราฟจึง☐แกน X · ตรวจ: จุดวกกลับ $x = -1$, $y =$ ☐ กราฟหงายและจุดต่ำสุดอยู่**เหนือ**แกน X
3. ตัดแกน Y ที่จุด (0, ☐)

$b^2 - 4ac$ กับจำนวนจุดตัดแกน X



$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
ตัดแกน X ☐ จุด	ตัดแกน X ☐ จุด	ตัดแกน X ☐ จุด

ก้าวขึ้นอีกขั้น

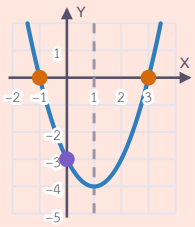
ร่างกราฟจาก 4 อย่าง

$y = -x^2 + 4x$: ① $a = -1$ กราฟ☐ ② จุดวกกลับ (☐, ☐) ③ ตัดแกน Y ที่ (0, ☐) ④ ตัดแกน X ที่ $x =$ ☐ และ ☐ · สี่อย่างนี้พอสำหรับร่างกราฟโดยไม่ต้องทำตาราง



ตัดแกน Y: แทน $x = 0$ ได้จุด $(0, c)$ · **ตัดแกน X**: แก้สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ได้จุด $(x, 0)$

$b^2 - 4ac > 0$ ตัด 2 จุด · $= 0$ แตะ 1 จุด (จุดวกกลับอยู่บนแกน X) · < 0 ไม่ตัดแกน X



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(6) เติมคำตอบ · ข้อ (7) ร่างกราฟ · ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $y = x^2 - 5x + 6$ ตัดแกน X ที่ $x =$ ☐ และ ☐ · ตัดแกน Y ที่ (0, ☐)

(2) $y = x^2 - 9$ ตัดแกน X ที่ $x =$ ☐ และ ☐ · ตัดแกน Y ที่ (0, ☐)

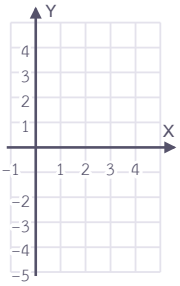
(3) $y = -x^2 + 4x$ ตัดแกน X ที่ $x =$ ☐ และ ☐ · ตัดแกน Y ที่ (0, ☐)

(4) $y = x^2 - 6x + 9$: $b^2 - 4ac =$ ☐ ตัดแกน X ☐ จุด คือ (☐, 0)

(5) $y = 2x^2 - x + 3$: $b^2 - 4ac =$ ☐ กราฟ ☐ แกน X

(6) $y = x^2 - 2x - 1$: ตัดแกน X ☐ จุด ที่ $x =$ ☐

(7) ร่างกราฟของ $y = x^2 - 4x$



(8) จงหาค่า k ที่ทำให้กราฟของ $y = x^2 + 6x + k$ แตะแกน X เพียงจุดเดียว และบอกจุดนั้น

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 −3 , -1 , 3 , 16 , 2 โจทย์ข้อ 2 −16 , ไม่ตัด , 4 , 5 , 2 , 1 , 0

ระวัง! จุดตัดแกน X เขียน $(3, 0)$ จุดตัดแกน Y เขียน $(0, c)$ อย่าสลับตำแหน่ง · ตัดแกน Y ได้จุดเดียวเสมอ



09 หาสมการจากกราฟ

ย้อนกลับจากบทที่แล้ว: เห็นกราฟแล้วเขียนสมการ เลือกรูปสมการให้ตรงกับสิ่งที่รู้ (จุดวกกลับ หรือจุดตัดแกน X) แล้วแทนอีกหนึ่งจุดหาค่า a

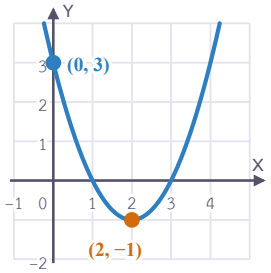
โจทย์ข้อ 1 รู้จุดวกกลับ (2, −1) และกราฟผ่านจุด (0, 3)

1 จุดวกกลับ (2, −1) จึงเริ่มจาก $y = a(x-2)^2 - 1$ (ยังไม่รู้ a)

2 แทนจุด (0, 3): $3 = a(0-2)^2 - 1$ ได้ $4a =$ ☐ ดังนั้น $a =$ ☐

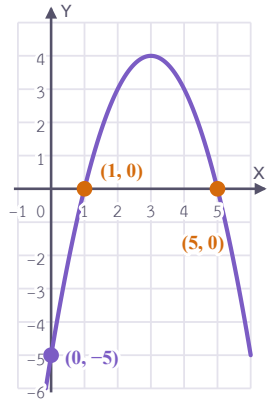
3 สมการคือ $y =$ ☐ กระจายได้ $y =$ ☐

กราฟที่โจทย์ให้



โจทย์ข้อ 2 รู้จุดตัดแกน X ที่ $x = 1, x = 5$ และกราฟผ่านจุด (0, −5)

กราฟที่โจทย์ให้



1 ตัดแกน X ที่ 1 และ 5 จึงเริ่มจาก $y = a(x-1)(x-5)$

2 แทน (0, −5): $-5 = a(0-1)(0-5) = 5a$ ได้ $a =$ ☐

3 สมการ $y =$ ☐ จุดวกกลับอยู่กึ่งกลาง $x =$ ☐ ได้ $y =$ ☐

ก้าวขึ้นอีกขั้น

$y = a(x-p)(x-q)$

พาราโบลาที่ตัดแกน X ที่ −2 และ 4 มีได้หลายรูป เช่น $y = (x+2)(x-4)$ หรือ $y = -2(x+2)(x-4)$ ทุกรูปมีแกนสมมาตร $x =$ ☐ เหมือนกัน ลองเขียนอีกหนึ่งสมการด้วย a ของเธอเอง



รู้จุดวกกลับ (h, k): เริ่มจาก $y = a(x-h)^2 + k$ · **รู้จุดตัดแกน X ที่ p, q**: เริ่มจาก $y = a(x-p)(x-q)$

แล้วแทน**อีกหนึ่งจุด**บนกราฟเพื่อหา a · ตรวจ: แทนจุดที่โจทย์ให้ลงในสมการที่ได้ ต้องเป็นจริงทุกจุด

รู้จุดวกกลับ ➜ $y = a(x-h)^2 + k$

รู้จุดตัดแกน X ➜ $y = a(x-p)(x-q)$

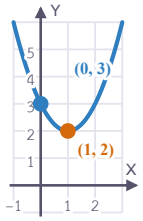
แทนอีก 1 จุด ➜ ได้ a

แบบฝึกหัดเบื้องต้น

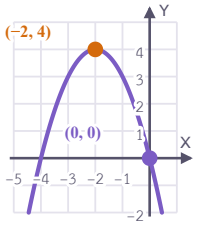
➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

ข้อ (1)–(4) เขียนสมการจากกราฟ · ข้อ (5) เติมคำตอบ · ข้อ (6)–(8) แสดงวิธีทำ

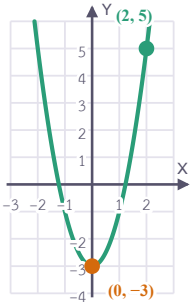
(1) $y =$ ☐



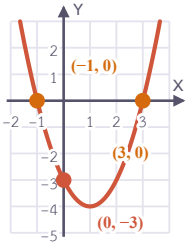
(2) $y =$ ☐



(3) $y =$ ☐



(4) $y =$ ☐



(5) ตัดแกน X ที่ $x = 0$, $x = 4$ และผ่าน $(2, 8)$: $a =$ ☐ สมการ $y =$ ☐

(6) จงเขียนสมการพาราโบลา**คว่ำ**ที่มีจุดวกกลับ $(3, 1)$ มา 1 สมการ

(7) พาราโบลาตัดแกน X ที่ $x = 2$ และ $x = 6$ มีค่าต่ำสุดเป็น -8 จงหาสมการ

(8) พาราโบลามีจุดวกกลับ $(-1, -8)$ และผ่านจุด $(1, 0)$ จงหาสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 4 , 1 , $(x-2)^2 - 1$, $x^2 - 4x + 3$ โจทย์ข้อ 2 -1 , $-(x-1)(x-5)$, 3 , 4

ระวัง! จุดวกกลับ $(-2, 4)$ เขียนเป็น $(x+2)^2$ ไม่ใช่ $(x-2)^2$ · หาค่า a ต้องแทนจุด**อื่น** ไม่ใช่จุดวกกลับ (แทนจุดวกกลับจะได้ $k = k$ ไม่ได้ a)



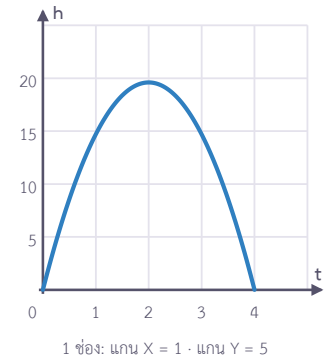
10 โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

"สูงที่สุด" "พื้นที่มากที่สุด" "ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด" ถ้าเขียนเป็นฟังก์ชันกำลังสองได้ คำตอบอยู่ที่**จุดวกกลับ**เสมอ

โจทย์ข้อ 1 โยนลูกบอลขึ้นไปตรง ๆ ความสูงหลังเวลา t วินาทีคือ $h = 19.6t - 4.9t^2$ เมตร

1. $a = -4.9,\ b = 19.6$: เวลาที่สูงสุด $t = \dfrac{-19.6}{2(-4.9)} =$ ☐ วินาที
2. ความสูงสูงสุด $h = 19.6(2) - 4.9(2)^2 = 39.2 - 19.6 =$ ☐ เมตร
3. ตกถึงพื้นเมื่อ $h = 0$: $4.9t(4 - t) = 0$ ได้ $t = 0$ หรือ $t =$ ☐ วินาที (ขึ้น 2 วินาที ลง 2 วินาที)

กราฟความสูง–เวลา



1 ช่อง: แกน X = 1 · แกน Y = 5

โจทย์ข้อ 2 มีรั้วยาว 40 เมตร ล้อมที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้ได้พื้นที่มากที่สุด

1. ความยาวรอบรูป 40 ม. กว้าง + ยาว = ☐ ม. ถ้ากว้าง x ม. จะยาว $20 - x$ ม.
2. พื้นที่ $A = x(20 - x)$ ลองแทนค่าในตาราง: พื้นที่เพิ่มขึ้นแล้วลดลง
3. จุดวกกลับ $x = \dfrac{-20}{2(-1)} =$ ☐ ได้พื้นที่มากสุด ☐ ตร.ม. คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ลองหลายแบบ

กว้าง x (ม.)	2	4	6	8	10	12
พื้นที่ (ตร.ม.)	36	64	☐	☐	☐	☐

ก้าวขึ้นอีกขั้น

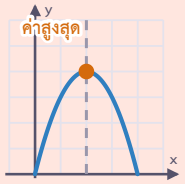
ชิดกำแพง ไม่ใช่จัตุรัส!

ใช้รั้ว 24 ม. ล้อมเล้าไก่ชิดกำแพง 3 ด้าน: ด้านตั้งฉากกำแพงยาว x ม. ด้านขนานกำแพงยาว $24 - 2x$ ม. $A = x(24 - 2x)$ มากสุดเมื่อ $x =$ ☐ ได้ ☐ ตร.ม. (ด้านขนานกำแพงยาว 12 ม. ยาวเป็น 2 เท่าของอีกด้าน)



โจทย์ค่าสูงสุด/ต่ำสุด: ① กำหนดตัวแปร ② เขียนฟังก์ชันกำลังสอง ③ หาจุดวกกลับ ($x=-b/2a$ หรือเติมกำลังสอง) ④ ตอบทั้ง**ค่าสูงสุด/ต่ำสุด** (ค่า y) และ**เกิดเมื่อใด** (ค่า x) พร้อมหน่วย

$a<0$ กราฟคว่ำ มีค่าสูงสุด · $a>0$ กราฟหงาย มีค่าต่ำสุด



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 30

จงแก้โจทย์ปัญหา ตอบให้ครบทั้งค่าสูงสุด/ต่ำสุด และเกิดเมื่อใด

(1) จำนวนสองจำนวนรวมกันได้ 16 ผลคูณของสองจำนวนนี้มากที่สุดเท่าใด

(2) เตะลูกตะกร้อขึ้นไปตรง ๆ ความสูงหลังเวลา t วินาทีคือ $h=9.8t-4.9t^2$ เมตร ลูกตะกร้อขึ้นไปสูงสุดกี่เมตร เมื่อเวลาเท่าใด

(3) มีรั้วยาว 60 เมตร ล้อมแปลงผักรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า พื้นที่มากที่สุดเท่าใด และต้องกว้าง ยาวเท่าใด

(4) ใช้รั้วยาว 40 เมตร ล้อมเล้าไก่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าชิดกำแพง (ล้อม 3 ด้าน) พื้นที่มากที่สุดเท่าใด

(5) ร้านขายน้ำปั่นแก้วละ 30 บาท ขายได้วันละ 100 แก้ว ถ้าขึ้นราคาแก้วละ x บาท จะขายได้น้อยลง $2x$ แก้ว ควรขายแก้วละกี่บาทจึงได้รายรับมากที่สุด

(6) ค่าใช้จ่ายในการทำขนมครก x ถาด คือ $C=x^2-40x+500$ บาท ทำกี่ถาดค่าใช้จ่ายต่ำสุด และต่ำสุดกี่บาท

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 2 , 19.6 , 4 โจทย์ข้อ 2 20 , 10 , 100 , 84 , 96 , 100 , 96

ระวัง! $4.9t^2$ มาจากสูตรฟิสิกส์ $\frac{1}{2}gt^2$ เมื่อ $g\approx 9.8$ เมตร/วินาที² (ไม่คิดแรงต้านอากาศ) · ผลคูณมากสุดคือค่า y ของจุดวกกลับ ไม่ใช่ค่า x



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 3 อ่านกราฟและนำไปใช้

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

_____

/ 100



1 10 คะแนน

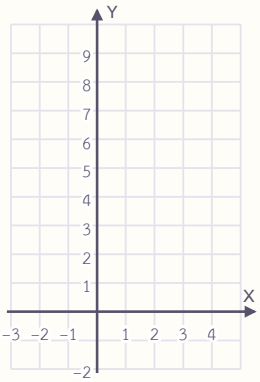
จงหาจุดที่กราฟของ $y = x^2 + x - 6$ ตัดแกน X และแกน Y

2 10 คะแนน

กราฟต่อไปนี้ตัดแกน X กี่จุด (ก) $y = 4x^2 - 4x + 1$ (ข) $y = x^2 + x + 1$

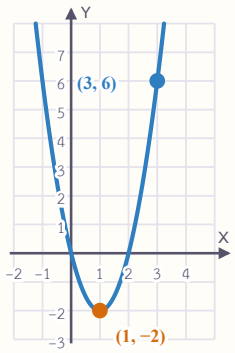
3 10 คะแนน

ร่างกราฟของ $y = -x^2 + 2x + 8$ แสดงจุดวกกลับ จุดตัดแกน X และแกน Y



4 10 คะแนน

จงหาสมการของพาราโบลาในภาพ ซึ่งมีจุดวกกลับ (1, −2) และผ่านจุด (3, 6)



5 10 คะแนน

พาราโบลาตัดแกน X ที่ $x = -3$ และ $x = 1$ และผ่านจุด (0, 6) จงหาสมการ และบอกว่ากราฟหงายหรือคว่ำ

6 10 คะแนน

จงหาค่า k ที่ทำให้กราฟของ $y = x^2 - 4x + k$ แตะแกน X เพียงจุดเดียว และบอกจุดนั้น

7 10 คะแนน

ข้าวหอมบอกว่า “กราฟของ $y = x^2 - 6x + 10$ ตัดแกน X สองจุด เพราะ $c = 10$ เป็นจำนวนบวก” ข้าวหอมพูดถูกหรือไม่ เพราะอะไร

8 10 คะแนน

โยนลูกบอลขึ้นไปตรง ๆ ความสูงหลังเวลา t วินาทีคือ $h = 29.4t - 4.9t^2$ เมตร ลูกบอลขึ้นสูงสุดกี่เมตร เมื่อใด และตกถึงพื้นเมื่อใด

9 10 คะแนน

ใช้รั้วยาว 36 เมตร ล้อมแปลงผักรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าชิดกำแพง (ล้อม 3 ด้าน) พื้นที่มากที่สุดเท่าใด และแต่ละด้านยาวเท่าใด

10 10 คะแนน

ร้านส้มตำขายจานละ 40 บาท ขายได้วันละ 120 จาน ทุกครั้งที่ขึ้นราคา 5 บาท จะขายได้น้อยลง 10 จาน ควรขายจานละกี่บาทจึงได้รายรับมากที่สุด และรายรับนั้นเป็นเท่าใด

ก้าวขึ้นอีกขั้น

ต่อยอดใน ม.ปลาย

กราฟช่วยแก้**อสมการกำลังสอง**ได้ เช่น $x^2 - 2x - 3 < 0$ คือค่า x ที่กราฟ $y = x^2 - 2x - 3$ อยู่**ใต้**แกน X ซึ่งก็คือช่วงระหว่างจุดตัดแกน X ที่ -1 กับ 3



เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

01 ฟังก์ชันกำลังสอง

(1) เป็น (2) ไม่เป็น (3) $x^2 - x - 6$, -6 (4) 3 , 0 , −1 , 0 , 3 (5) −4 , −1 , −1 , −4

(6) พาราโบลาหงาย ผ่าน (−1, 3), (0, 0), (1, −1), (2, 0), (3, 3) จุดต่ำสุด $(1, -1)$ (7) อยู่ , ไม่อยู่ (8) $k = -2$ หรือ $k = 2$

02 กราฟของ $y = ax^2$

(1) หงาย , คว่ำ (2) $y = 3x^2$, $y = -x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ (3) ค , ข , ก (4) 3 , $-\frac{1}{2}$ (5) 4 , แคบ

(6) พาราโบลาคว่ำ ผ่าน (−4, −8), (−2, −2), (0, 0), (2, −2), (4, −8) (7) $a = 2, y = 8$

03 จุดวกกลับ แกนสมมาตร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

(1) 1 , −4 , ต่ำสุด (2) −2 , 4 , สูงสุด (3) 2 , −2 , ต่ำสุด (4) 0 , 3 , สูงสุด (5) 1 , −1 (6) (4, 6)

04 กราฟของ $y = ax^2 + k$

(1) ขึ้น , 5 , 0 , 5 (2) ลง , 3 , 0 , −3 , สูงสุด , −3 (3) 0 , −4 , ต่ำสุด , −4 (4) $3x^2 + 2$ (5) $-x^2 - 6$

(6) เลื่อน $y = x^2$ ลง 4 หน่วย จุดวกกลับ $(0, -4)$ ตัดแกน X ที่ (−2, 0), (2, 0) (7) −3 (8) (−3, 0) และ (3, 0)

05 กราฟของ $y = a(x - h)^2$

(1) ขวา , 5 , 5 , 0 (2) ซ้าย , 4 , −4 , 0 (3) 1 , 0 , 1 , สูงสุด , 0 (4) $2(x + 1)^2$ (5) ค , ก , ข

(6) เลื่อน $y = x^2$ ไปทางขวา 2 หน่วย จุดวกกลับ $(2, 0)$ ผ่าน (0, 4), (4, 4) (7) $y = 2(x - 2)^2$

06 กราฟของ $y = a(x - h)^2 + k$

(1) 2 , 1 , ต่ำสุด , 1 (2) −3 , −5 , −3 (3) 4 , 2 , สูงสุด , 2 (4) −1 , 7 , ต่ำสุด , 7 (5) −2 , −1 , คว่ำ

(6) $(x - 2)^2 - 3$ (7) พาราโบลาคว่ำ จุดวกกลับ $(1, 4)$ ตัดแกน X ที่ (−1, 0), (3, 0) ตัดแกน Y ที่ (0, 3)

(8) $y = 2(x - 3)^2 - 5$ · จุดวกกลับ $(3, -5)$ · ตัดแกน Y ที่ $(0, 13)$

เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

07 กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$

(1) $(x+2)^2 - 3$, -2 , -3 (2) $(x-1)^2 + 5$, 1 , 5 (3) 3 , 3 , 5 , สูงสุด , 5 (4) 1 , 5 (5) -2 , 12 (6) -2 , -3

(7) 8 (8) $y = (x-4)^2 - 6$ ค่าต่ำสุด -6 เมื่อ $x = 4$

08 จุดตัดแกน X และแกน Y

(1) 2 , 3 , 6 (2) -3 , 3 , -9 (3) 0 , 4 , 0 (4) 0 , 1 , 3 (5) -23 , ไม่ตัด (6) 2 , $1 \pm \sqrt{2}$

(7) พาราโบลาหงาย จุดวกกลับ $(2, -4)$ ตัดแกน X ที่ $(0, 0)$, $(4, 0)$ (8) $k = 9$ · จุด $(-3, 0)$

09 หาสมการจากกราฟ

(1) $(x-1)^2 + 2$ (2) $-(x+2)^2 + 4$ (3) $2x^2 - 3$ (4) $(x+1)(x-3)$ (5) -2 , $-2x(x-4)$

(6) เช่น $y = -(x-3)^2 + 1$ (ใช้ $a < 0$ ค่าใดก็ได้) (7) $y = 2(x-2)(x-6)$ (8) $y = 2x^2 + 4x - 6$

10 โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

(1) 64 (เมื่อทั้งสองจำนวนเป็น 8) (2) สูงสุด 4.9 เมตร เมื่อ $t = 1$ วินาที (3) 225 ตร.ม. กว้าง 15 ม. ยาว 15 ม.

(4) 200 ตร.ม. (ด้านตั้งฉากกำแพง 10 ม. ด้านขนานกำแพง 20 ม.) (5) แก้วละ 40 บาท ได้รายรับ 3,200 บาท

(6) 20 ถาด ค่าใช้จ่ายต่ำสุด 100 บาท

บันทึกความก้าวหน้าของฉัน

ทำเสร็จแล้วกา ✓ ในช่อง บทเรียนไหนยังไม่มั่นใจ กาช่องสุดท้ายไว้กลับมาทบทวน

บทเรียน	เรียนหน้าซ้าย	ทำแบบฝึก	ทำถูก	อยากทบทวน
บทที่ 1 รู้จักพาราโบลา				
01 ฟังก์ชันกำลังสอง	☐	☐	____ / 8	☐
02 กราฟของ $y = ax^2$	☐	☐	____ / 7	☐
03 จุดวกกลับ แกนสมมาตร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	☐	☐	____ / 6	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1			____ / 100	☐
บทที่ 2 การเลื่อนกราฟ				
04 กราฟของ $y = ax^2 + k$	☐	☐	____ / 8	☐
05 กราฟของ $y = a(x - h)^2$	☐	☐	____ / 7	☐
06 กราฟของ $y = a(x - h)^2 + k$	☐	☐	____ / 8	☐
07 กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2			____ / 100	☐
บทที่ 3 อ่านกราฟและนำไปใช้				
08 จุดตัดแกน X และแกน Y	☐	☐	____ / 8	☐
09 หาสมการจากกราฟ	☐	☐	____ / 8	☐
10 โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด	☐	☐	____ / 6	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3			____ / 100	☐



ครบทุกช่องแล้ว เก่งมาก! กราฟพาราโบลาจะได้ใช้ต่อใน ม.4 (ฟังก์ชันกำลังสอง อสมการกำลังสอง) และในวิชาฟิสิกส์ (การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์)

บันทึก

One by One
Step by Step
เรียนทีละบท ฝึกทีละขั้น

หนังสือชุด One by One ม.3

1. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง
3. สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. ความคล้าย
5. **กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง**
6. สถิติ (3) แผนภาพกล่อง
7. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
8. วงกลม
9. พีระมิด กรวย และทรงกลม
10. ความน่าจะเป็น
11. อัตราส่วนตรีโกณมิติ



Math Step Studio
mathstepstudio.com