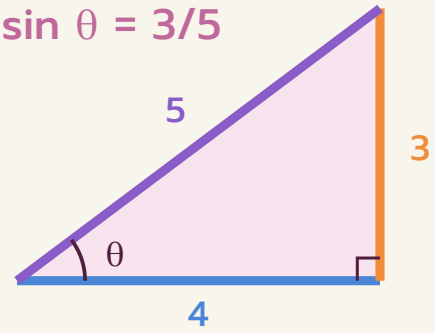
ONE BY ONE
STEP BY STEP

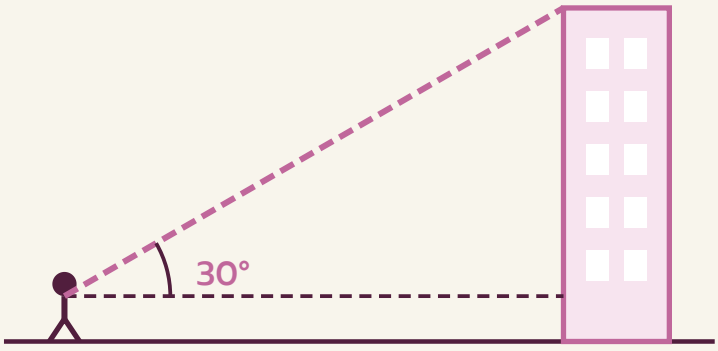
อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ม.3

11 บทเรียน · ฉบับนักเรียน











ชื่อ _____ นามสกุล _____

ชั้น ม.3/ _____ เลขที่ _____

สารบัญ

บทที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

01 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	4
02 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน	6
03 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์	8
04 หาอัตราส่วนจากข้อมูลบางส่วน	10
05 ความสัมพันธ์ของ sin cos tan	12
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1	14

บทที่ 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° และ 60°

06 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60°	16
07 มุม 45° และตารางค่าพิเศษ	18
08 หาความยาวด้านด้วยมุมพิเศษ	20
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2	22

บทที่ 3 การนำไปใช้: มุมเงยและมุมก้ม

09 มุมเงยและมุมก้ม	24
10 หาความสูงและระยะทาง	26
11 โจทย์ที่มีสองรูปสามเหลี่ยม	28
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3	30
เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น	**32**
บันทึกความก้าวหน้าของฉัน	**34**

ใช้เล่มนี้อย่างไร

ทุกบทเรียนมี 2 หน้า วางโครงเหมือนกันทุกบท เรียนทีละเรื่อง ทีละขั้น

1 หน้าซ้าย · เรียนรู้ผ่านโจทย์
อ่านโจทย์ข้อ 1 และ 2 ดูกราฟหรือตาราง แล้วเติมคำตอบลงในช่องทีละขั้น เพื่อค้นพบวิธีคิดด้วยตัวเอง

2 ก้าวขั้นอีกขั้น
กล่องสีเทาท้ายหน้า บอกเหตุผลเบื้องหลัง ทางลัด หรือเรื่องที่ต่อยอดได้

3 หน้าขวา · สรุป + ฝึก
อ่านแถบสรุปด้านบน ทำแบบฝึกหัดเบื้องต้นเรียงจากง่ายไปยาก แล้วตรวจกับเฉลยโจทย์หน้าซ้ายและเฉลยท้ายเล่ม

4 แบบทดสอบทบทวน
ท้ายแต่ละบท มีคะแนนกำกับทุกข้อ ลองทำโดยไม่เปิดดูบทเรียน แล้วรวมคะแนน

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเล่ม

$\angle C = 90^\circ$	มุม C เป็นมุมฉาก (ทำเครื่องหมาย ∟ ในรูป)
$\approx$	ประมาณ (ใช้ $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ ตามที่โจทย์กำหนด)
- - - -	เส้นระดับสายตา (ขนานกับพื้น)
$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$	ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ ของมุม A
▬ ▬ ▬	สีของด้านเทียบกับมุมที่ทำเครื่องหมาย: ตรงข้ามมุม ประชิดมุม ตรงข้ามมุมฉาก

ทบทวนก่อนเริ่ม

- ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (ม.2): $c^2 = a^2 + b^2$
- 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17 เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกัน 180° · มุมเท่ากันสามคู่ $\Rightarrow$ คล้ายกัน
- รากที่สอง: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$
- เศษส่วนอย่างต่ำ: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$



เล่มนี้ไม่ต้องรีบ ทำทีละบทเรียน ถ้าติดตรงไหน ย้อนไปดูโจทย์ข้อ 1–2 ของบทเรียนนั้นอีกรอบ

01 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ม.2 เรารู้จัก**ด้านตรงข้ามมุมฉาก** (ด้านที่ยาวที่สุด) จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว บทนี้ตั้งชื่ออีกสองด้าน โดย**เทียบกับมุม**แหลมมุมใดมุมหนึ่ง · ระบายสีตาม: ตรงข้ามมุม ประชิดมุม ตรงข้ามมุมฉาก

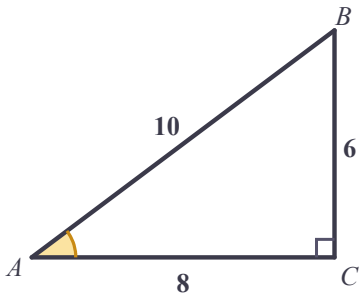
โจทย์ข้อ 1 △ABC มี ∠C = 90° เทียบกับมุม A

1 ด้านตรงข้ามมุมฉาก อยู่ตรงข้ามมุม C คือ ☐ ยาว ☐ หน่วย (ตรวจ: $6^2 + 8^2 =$ ☐ $= 10^2$)

2 ด้านตรงข้ามมุม A คือด้านที่**ไม่ได้เป็นแขน**ของมุม A ได้แก่ ☐ ยาว ☐ หน่วย

3 ด้านประชิดมุม A คือแขนของมุม A ที่ไม่ใช่ด้านตรงข้ามมุมฉาก ได้แก่ ☐ ยาว ☐ หน่วย

มองจากมุม A



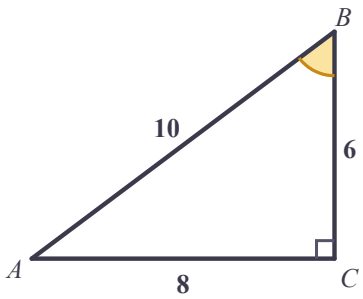
โจทย์ข้อ 2 รูปเดิม แต่เทียบกับมุม B

1 ด้านตรงข้ามมุม B คือ ☐ ยาว ☐ หน่วย

2 ด้านประชิดมุม B คือ ☐ ยาว ☐ หน่วย

3 ด้านตรงข้ามมุมฉากยังคงเป็น ☐ · ด้านตรงข้ามมุม A กลายเป็นด้าน ☐ มุม B

มองจากมุม B



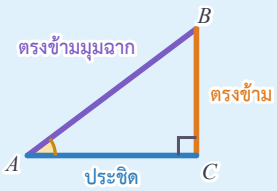
ก้าวขึ้นอีกขั้น

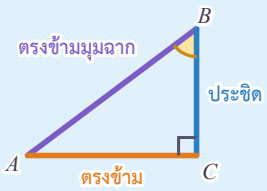
ด้านตรงข้ามมุมฉากไม่เปลี่ยนตามมุม

เปลี่ยนมุมที่มอง ด้านตรงข้ามกับด้านประชิด**สลับกัน** แต่ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านเดิมเสมอ และยาวที่สุดเสมอ · ด้านประชิดมุม A คือด้านตรงข้ามมุม ☐ และด้านประชิดมุม B คือด้านตรงข้ามมุม ☐



ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เทียบกับ**มุมแหลม A**: **ด้านตรงข้ามมุม A** = ด้านที่ไม่ได้เป็นแขนของมุม A · **ด้านประชิดมุม A** = แขนของมุม A ที่ไม่ใช่ด้านตรงข้ามมุมฉาก · **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** = ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก (ยาวที่สุด)





แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

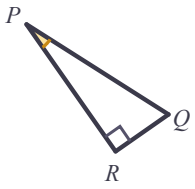
เติมชื่อด้านเทียบกับมุมที่ทำเครื่องหมาย (ตั้งชื่อตามมุม ไม่ใช่ตามตำแหน่งในรูป)

(1) มุม P

ตรงข้าม ____

ประชิด ____

ตรงข้ามมุมฉาก ____

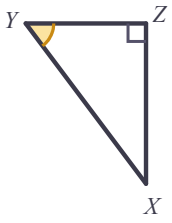


(2) มุม Y

ตรงข้าม ____

ประชิด ____

ตรงข้ามมุมฉาก ____

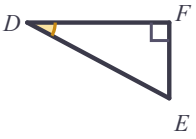


(3) มุม D

ตรงข้าม ____

ประชิด ____

ตรงข้ามมุมฉาก ____

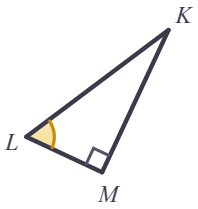


(4) มุม L

ตรงข้าม ____

ประชิด ____

ตรงข้ามมุมฉาก ____

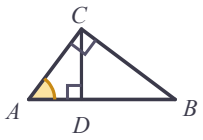


(5) $\angle ACB = 90°$ และ $CD \perp AB$

ใน $\triangle ACD$ เทียบกับมุม A

ตรงข้าม ____

ตรงข้ามมุมฉาก ____



(6) $\triangle ABC$ มี $\angle C = 90°$ มะปรางบอกว่า “ด้านประชิดมุม A คือ AB เพราะ AB ติดกับมุม A” ถูกหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 AB , 10 , 100 , BC , 6 , AC , 8 โจทย์ข้อ 2 AC , 8 , BC , 6 , AB , ประชิด

ระวัง! ด้านตรงข้ามมุมฉากก็ “ติด” มุม A เหมือนกัน แต่ไม่เรียกว่าด้านประชิด · รูปหมุนหรือพลิกได้ ให้หามุมฉากก่อนเสมอ แล้วจึงดูมุมที่ถาม



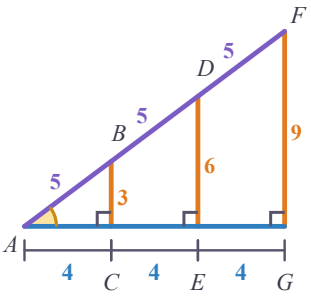
02 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี**มุมแหลมเท่ากัน** จะคล้ายกัน (มุม-มุม-มุม จากเล่มความคล้าย บทเรียน 04) อัตราส่วนของด้านจึงเท่ากัน ไม่ว่ารูปจะเล็กหรือใหญ่

โจทย์ข้อ 1 △ABC, △ADE, △AFG มีมุม A ร่วมกัน

1. ทั้งสามรูปมีมุม A ร่วมกัน และมีมุมฉาก มุมที่สามจึงเท่ากันด้วย (มุมภายในรวม ☐°) รูปทั้งสามจึงคล้ายกัน (มุม-มุม-มุม)
2. อ่านความยาวจากรูป เขียนอัตราส่วนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เติมในตาราง
3. อัตราส่วน ตรงข้าม : ตรงข้ามมุมฉาก ของทั้งสามรูปเท่ากับ ☐ เท่ากันหมด

ข้อนรูปสามเหลี่ยม

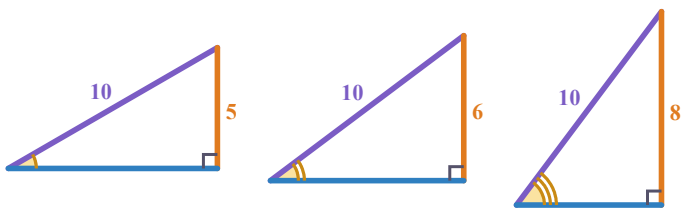


รูป	ตรงข้าม : ตรงข้ามมุมฉาก	ประชิด : ตรงข้ามมุมฉาก	ตรงข้าม : ประชิด
△ABC	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
△ADE	☐	☐	☐
△AFG	☐	☐	☐

โจทย์ข้อ 2 ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 เท่ากัน แต่มุมต่างกัน

1. อัตราส่วน ตรงข้าม : ตรงข้ามมุมฉาก เป็นทศนิยม: รูปซ้าย ☐ รูปกลาง ☐ รูปขวา ☐
2. มุมยิ่งใหญ่ อัตราส่วนนี้ยิ่ง ☐ · อัตราส่วนจึงขึ้นอยู่กับ**ขนาดของมุม**

มุมเล็ก → มุมใหญ่



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ตั้งชื่อให้อัตราส่วนของมุม

เพราะอัตราส่วนขึ้นกับมุมอย่างเดียว เราจึงตั้งชื่อให้เป็นของมุมได้ (บทเรียนถัดไป: sin cos tan) · เล่มความคล้าย บทเรียน 08 วัดความสูงด้วยเงา: ความสูง : ความยาวเงา เท่ากันทุกต้น เพราะแสงแดดทำมุม ☐ กับพื้น



รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลมเท่ากันคล้ายกัน ดังนั้น **ตรงข้าม : ตรงข้ามมุมฉาก**, **ประชิด : ตรงข้ามมุมฉาก** และ **ตรงข้าม : ประชิด** ของมุมนั้น**มีค่าคงที่** ไม่ขึ้นกับขนาดรูป · มุมเปลี่ยน อัตราส่วนเปลี่ยน

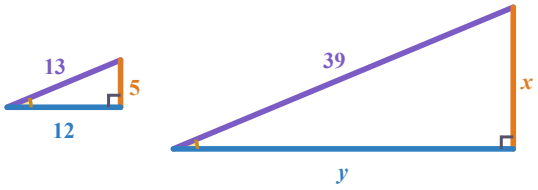


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

เติมคำตอบ ข้อ (5)–(6) แสดงวิธีทำ

(1) สองรูปคล้ายกัน มุมที่ทำเครื่องหมายเท่ากัน



x = ☐ y = ☐

(2) สามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านประกอบมุมฉาก 2 กับ 3 อีกรูปมี 4 กับ 6 มุมแหลมที่อยู่ตรงข้ามด้านสั้นเท่ากันหรือไม่ ☐

ถ้าอีกรูปมี 3 กับ 4 ล่ะ ☐

(3) ไม้เมตรยาว 1 ม. ปักตรง มีเงายาว 1.5 ม. ขณะเดียวกันต้นตาลมีเงายาว 18 ม. ต้นตาลสูง ☐ ม.

(4) ทางลาดสำหรับรถเข็น ทุกระยะตามแนวราบ 12 ม. สูงขึ้น 1 ม. ถ้าระยะตามแนวราบ 9 ม. จะสูงขึ้น ☐ ม.

(5) บันได ก พาดสูง 3 ม. โคนห่างกำแพง 4 ม. บันได ข พาดสูง 4 ม. โคนห่างกำแพง 5 ม. บันไดอันใดชันกว่า (มุมกับพื้นใหญ่กว่า)

(6) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมี ตรงข้าม : ประชิด ของมุม A เท่ากับ 4 : 3 อีกรูปที่คล้ายกันมีด้านประชิดมุม A ยาว 15 ซม. จงหาด้านตรงข้ามมุม A และด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปนี้

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 180 , $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$

โจทย์ข้อ 2 0.5 , 0.6 , 0.8 , มาก

ระวัง! อัตราส่วนเท่ากันต้องเทียบ**ด้านคู่เดียวกัน**เทียบกับมุมเดียวกัน: ตรงข้ามกับตรงข้าม ประชิดกับประชิด · รูปใหญ่ขึ้น ด้านยาวขึ้น แต่อัตราส่วนเท่าเดิม



03 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

อัตราส่วนคงที่ทั้งสามจากบทเรียน 02 มีชื่อเรียกว่า**อัตราส่วนตรีโกณมิติ**ของมุม A: **ไซน์** (sin) **โคไซน์** (cos) และ**แทนเจนต์** (tan)

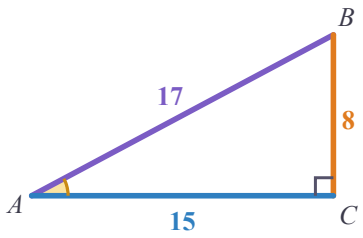
โจทย์ข้อ 1 นิยามจาก △ABC ที่มี ∠C = 90°

1 $\sin A = \dfrac{\text{ตรงข้ามมุม A}}{\text{ตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{\square}{\square} = \square$

2 $\cos A = \dfrac{\text{ประชิดมุม A}}{\text{ตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{\square}{\square} = \square$

3 $\tan A = \dfrac{\text{ตรงข้ามมุม A}}{\text{ประชิดมุม A}} = \dfrac{\square}{\square} = \square$

ด้านเทียบกับมุม A



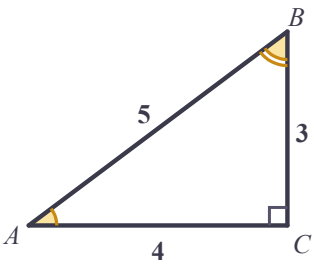
โจทย์ข้อ 2 หาค่าจากรูปสามเหลี่ยม 3-4-5

1 เทียบกับมุม A: ด้านตรงข้ามยาว 3 ด้าน ประชิดยาว 4 เติมแถวมุม A

2 เทียบกับมุม B: ด้านตรงข้ามกับด้านประชิด**สลับกัน** เติมแถวมุม B

3 สังเกต: $\sin A = \cos \square$ และ $\tan B = \square$ มากกว่า 1

ตาราง sin cos tan



	sin	cos	tan
มุม A			
มุม B			

ก้าวขึ้นอีกขั้น

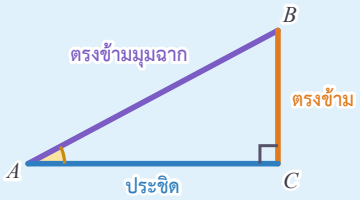
จำง่าย ๆ

sin = ข้าม/ฉาก · **cos** = ชิด/ฉาก · **tan** = ข้าม/ชิด · sin กับ cos ของมุมแหลม**น้อยกว่า 1 เสมอ** เพราะตัวส่วนคือด้าน $\square$ ซึ่งยาวที่สุด แต่ tan มากกว่า 1 ได้



△ABC มี $\angle C = 90°$: $\sin A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ $\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม A}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ $\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ด้านประชิดมุม A}}$

เขียนอัตราส่วนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

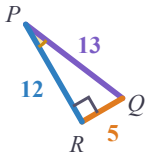
หา sin cos tan ของมุมที่ทำเครื่องหมาย ข้อ (6) แสดงวิธีทำ

(1) มุม P

$\sin P =$ ☐

$\cos P =$ ☐

$\tan P =$ ☐

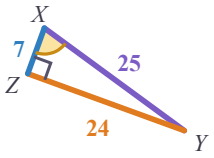


(2) มุม X

$\sin X =$ ☐

$\cos X =$ ☐

$\tan X =$ ☐

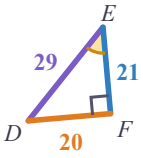


(3) มุม E

$\sin E =$ ☐

$\cos E =$ ☐

$\tan E =$ ☐

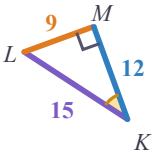


(4) มุม K

$\sin K =$ ☐

$\cos K =$ ☐

$\tan K =$ ☐



(5) △DEF มี $\angle F = 90°$ $DF = 12$ $EF = 5$ $DE = 13$

อัตราส่วน $\frac{12}{13}$ คือ ☐

และ $\frac{5}{12}$ คือ ☐

(6) △ABC มี $\angle C = 90°$ $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$

ภูผาเขียนว่า $\sin A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$ ผิดตรงไหน และที่ถูกเป็นเท่าใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 BC , AB , $\frac{8}{17}$, AC , AB , $\frac{15}{17}$, BC , AC , $\frac{8}{15}$

โจทย์ข้อ 2 B , $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$

ระวัง! $\sin A$ เป็นชื่ออัตราส่วนของมุม A คำเดียว **ไม่ใช่** sin คูณ A · ต้องบอกมุมทุกครั้ง: $\sin A$ กับ $\sin B$ เป็นคนละค่ากัน



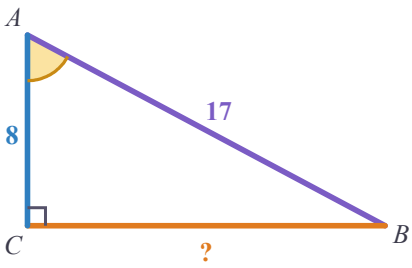
04 หาอัตราส่วนจากข้อมูลบางส่วน

รู้ด้านเพียงสองด้าน หรือรู้อัตราส่วนเพียงค่าเดียว ก็หาอัตราส่วนที่เหลือได้: **ร่างรูป** แล้วใช้**ทฤษฎีบทพีทาโกรัส** (ม.2) หาด้านที่สาม

โจทย์ข้อ 1 รู้สองด้าน: $AC = 8$, $AB = 17$

1. $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 17^2 - 8^2 =$ ☐ ได้ $BC =$ ☐
2. $\sin A =$ ☐ $\cos A =$ ☐ $\tan A =$ ☐

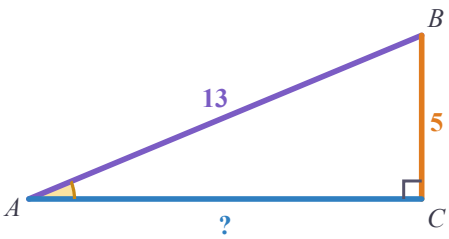
ร่างรูปแล้วหาด้าน ?



โจทย์ข้อ 2 รู้อัตราส่วน: $\sin A = \frac{5}{13}$

1. ร่างรูป: ให้ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 5 ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13
2. ด้านประชิดมุม A = $\sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{}$ ☐ = ☐
3. $\cos A =$ ☐ $\tan A =$ ☐

ร่างรูปจาก sin A



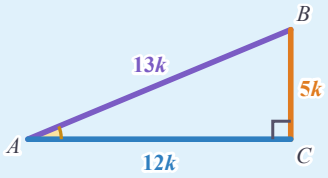
ก้าวขึ้นอีกขั้น

ทำไมใช้ 5 กับ 13 ได้

$\sin A = \frac{5}{13}$ ไม่ได้บอกว่าด้านยาว 5 จริง ด้านอาจยาว 10 กับ 26 ก็ได้ แต่รูปคล้ายกัน (บทเรียน 02) อัตราส่วนจึงเท่าเดิม · ถ้าเขียนเป็น $5k$, $13k$ ด้านประชิดคือ $12k$ ได้ $\cos A = \frac{12k}{13k} =$ ☐



รู้สองด้าน → หาด้านที่สามด้วยพีทาโกรัส: $c^2 = a^2 + b^2$ แล้วเขียนอัตราส่วน · **รู้อัตราส่วนหนึ่ง** → ร่างรูปให้ด้านเป็นเศษกับส่วนของอัตราส่วนนั้น หาด้านที่สาม แล้วเขียนอัตราส่วนที่เหลือ



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

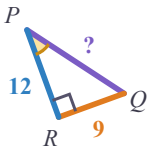
เติมคำตอบ (เศษส่วนอย่างต่ำ) ข้อ (5) ร่างรูปในกรอบ ข้อ (6) แสดงวิธีทำ

(1) ด้านตรงข้ามมุมฉาก = ☐

$\sin P$ = ☐

$\cos P$ = ☐

$\tan P$ = ☐

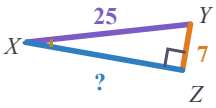


(2) ด้านประชิดมุม X = ☐

$\sin X$ = ☐

$\cos X$ = ☐

$\tan X$ = ☐



(3) $\cos A = \frac{4}{5}$ จงหา

$\sin A$ = ☐ $\tan A$ = ☐

(4) $\tan A = \frac{8}{15}$ จงหา

$\sin A$ = ☐ $\cos A$ = ☐

(5) ร่างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\tan A = \frac{4}{3}$ ทำเครื่องหมายมุม A แล้วหา $\sin A$ = ☐

(6) ด้านประชิดมุม A ยาว 6 ซม. และ $\tan A = \frac{4}{3}$ จงหาด้านตรงข้ามมุม A และด้านตรงข้ามมุมฉาก

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 225 , 15 , $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{8}$ โจทย์ข้อ 2 144 , 12 , $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$

ระวัง! หาด้านประกอบมุมฉากต้อง**ลบ**: $b^2 = c^2 - a^2$ · ถ้าลืมแล้วบวก จะได้ด้านที่ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งเป็นไปไม่ได้



05 ความสัมพันธ์ของ sin cos tan

อัตราส่วนทั้งสามไม่ได้แยกกันอยู่: รู้ sin กับ cos ก็ได้ tan · และ sin ของมุมหนึ่งคือ cos ของอีกมุมแหลม

โจทย์ข้อ 1 $\tan A = \sin A \div \cos A$ (รูป 3-4-5 จากบทเรียน 03)

1. $\sin A =$ ☐ และ $\cos A =$ ☐
2. $\sin A \div \cos A = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} =$ ☐ ซึ่งเท่ากับ $\tan A$
3. ทุกรูปเป็นแบบนี้ เพราะตัวส่วน AB ตัดกันหมด (ดูภาพ)

ตัดตัวส่วนที่เหมือนกัน

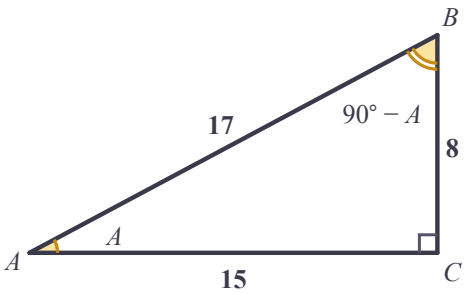
$$\frac{BC}{AB} \div \frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{BC}{\cancel{AB}} \times \frac{\cancel{AB}}{AC} = \frac{BC}{AC} = \tan A$$

โจทย์ข้อ 2 $\sin A = \cos(90° - A)$

1. มุมภายในรวม 180° ได้ $\angle A + \angle B =$ ☐ จึงได้ $\angle B = 90° - \angle A$
2. $\sin A = \frac{BC}{AB} =$ ☐ และ $\cos B = \frac{BC}{AB} =$ ☐
3. ด้าน BC เป็นด้านตรงข้ามมุม A และเป็นด้าน ☐ มุม B จึงได้ $\sin A = \cos(90° - A)$

มุมแหลมสองมุมรวมกัน 90°



ก้าวขึ้นอีกขั้น

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sin^2 A$ หมายถึง $(\sin A)^2 \cdot \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$ และพีทาโกรัสให้ $BC^2 + AC^2 = AB^2$ ผลจึงเท่ากับ ☐ เสมอ



$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ · $\sin A = \cos(90° - A)$ และ $\cos A = \sin(90° - A)$ · $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

เติมคำตอบ ข้อ (6)–(7) แสดงวิธีทำ

(1) $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$ ได้ $\tan A =$ ☐

(2) $\sin A = 0.6$, $\cos A = 0.8$ ได้ $\tan A =$ ☐

(3) $\sin 25° = \cos$ ☐ $\cos 72° = \sin$ ☐

(4) ถ้า $\sin A = \frac{7}{25}$ แล้ว $\cos(90° - A) =$ ☐

(5) รูปสามเหลี่ยม 20-21-29: $\sin^2 A + \cos^2 A =$ $(\frac{20}{29})^2 + (\frac{21}{29})^2 =$ ☐

(6) $\cos A = \frac{12}{13}$ ใช้ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ หา $\sin A$ (A เป็นมุมแหลม)

(7) $\sin A = \frac{1}{2}$ และ $\cos A = \frac{1}{2}$ เป็นของมุมแหลมมุมเดียวกันได้หรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ โจทย์ข้อ 2 $90°$, $\frac{8}{17}$, $\frac{8}{17}$, ประชิด

ระวัง! $\sin(90° - A)$ **ไม่เท่ากับ** $\sin 90° - \sin A$ · และ $\sin^2 A$ คือ $(\sin A)^2$ ไม่ใช่ $\sin(A^2)$



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

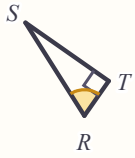
_____

/ 100



1 10 คะแนน

เทียบกับมุม R: ด้านตรงข้ามคือ [ ] ด้านประชิดคือ [ ] ด้านตรงข้ามมุมฉากคือ [ ]



2 10 คะแนน

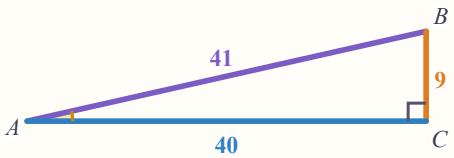
จากรูปข้อ 1 เทียบกับมุม S: ด้านตรงข้ามคือ [ ] ด้านประชิดคือ [ ]

3 10 คะแนน

△ABC กับ △DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน มี ∠A = ∠D ใน △ABC ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 5 ด้านประชิดยาว 12 ใน △DEF ด้านประชิดมุม D ยาว 36 จงหาด้านตรงข้ามมุม D

4 10 คะแนน

จากรูป จงหา $\sin A$ = [ ] $\cos A$ = [ ] $\tan A$ = [ ]



5 10 คะแนน

จากรูปข้อ 4 จงหา $\sin B$ = [ ] $\cos B$ = [ ] $\tan B$ = [ ]

6 10 คะแนน

$\triangle PQR$ มี $\angle R = 90°$ $PR = 21$ และ $QR = 20$ จงหา PQ แล้วหา $\sin P$, $\cos P$, $\tan P$

7 10 คะแนน

ถ้า $\tan A = \frac{12}{5}$ จงหา $\sin A$ และ $\cos A$

8 10 คะแนน

มิ้นท์หาค่า $\tan A$ จาก $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $BC = 5$, $AC = 12$, $AB = 13$) ได้ $\frac{5}{13}$ มิ้นท์ผิดตรงไหน ที่ถูกเป็นเท่าใด

9 10 คะแนน

เติมคำตอบ: $\sin 35° = \cos$ [ ] และถ้า $\sin A = \frac{8}{17}$, $\cos A = \frac{15}{17}$ แล้ว $\tan A =$ [ ]

10 10 คะแนน

บันไดยาว 5 ม. พิงกำแพงที่ตั้งฉากกับพื้น โคนบันไดห่างกำแพง 3 ม. ร่างรูป แล้วหา sin, cos, tan ของมุมที่บันไดทำกับพื้น

ก้าวต่อไปสู่ความสำเร็จ

ต่อไป: มุมที่หาค่าได้แม่นตรง

มุม 30°, 45° และ 60° หาค่า sin cos tan ได้แม่นตรงจากรูปที่รู้จักดี คือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าผ่าครึ่ง และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสผ่าแนวทแยง



06 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60°

ผ่า**รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า**ที่ยาวด้านละ 2 ออกเป็นสองซีก จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม 30° และ 60° ซึ่งรู้ความยาวทุกด้าน

โจทย์ข้อ 1 △ABC ด้านเท่า ยาวด้านละ 2 ลาก AD ตั้งฉากกับ BC

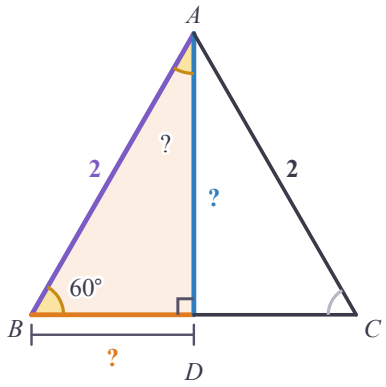
1 AD แบ่งครึ่งทั้งฐานและมุมยอด: BD = ☐ และ $\angle BAD$ = ☐

2 $AD^2 = 2^2 - 1^2$ = ☐ ได้ AD = ☐

3 เทียบกับมุม 30°: $\sin 30° = \frac{BD}{AB}$ = ☐ $\cos 30° = \frac{AD}{AB}$ = ☐

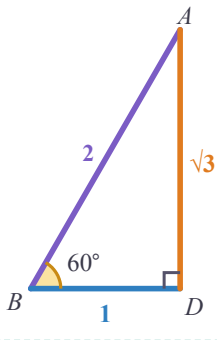
4 $\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ = ☐

ผ่าครึ่งรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



โจทย์ข้อ 2 รูปสามเหลี่ยม ABD เดิม เทียบกับมุม 60° (มุม B)

มองจากมุม 60°



1 ด้านตรงข้ามมุม B คือ ☐ ยาว √3 · ด้านประชิดมุม B คือ ☐ ยาว 1

2 $\sin 60°$ = ☐ $\cos 60°$ = ☐ $\tan 60°$ = ☐

ก้าวขึ้นอีกขั้น

30° กับ 60° รวมกันได้ 90°

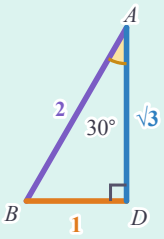
จึงได้ $\sin 30° = \cos$ ☐ และ $\sin 60° = \cos$ ☐ ตรงกับบทเรียน 05 · ด้านตรงข้ามมุม 30° ยาว**ครึ่งหนึ่ง**ของด้านตรงข้ามมุมฉากเสมอ



รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม 30° และ 60° มีด้านเป็นอัตราส่วน **1 : √3 : 2** (ตรงข้าม 30° : ตรงข้าม 60° : ตรงข้ามมุมฉาก)

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ · $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

หาค่า ข้อ (5)–(6) ใช้อัตราส่วน 1 : √3 : 2 ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $\sin 30° + \cos 60° =$ ☐

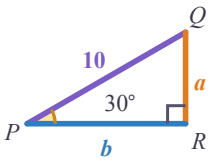
(2) $2 \sin 30° \cos 30° =$ ☐

(3) $\tan 30° \times \tan 60° =$ ☐

(4) $\sin^2 60° + \cos^2 60° =$ ☐

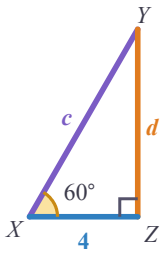
(5) $a =$ ☐

$b =$ ☐



(6) $c =$ ☐

$d =$ ☐



(7) มุมแหลม θ ที่ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ ☐ และที่ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ ☐

(8) ปาล์มบอกว่า “$\sin 60° = 2 \sin 30°$ เพราะ $60 = 2 \times 30$” จริงหรือไม่ เพราะอะไร

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 1 , 30° , 3 , $\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ โจทย์ข้อ 2 AD , BD , $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$

ระวัง! $\frac{1}{\sqrt{3}}$ กับ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ เป็นจำนวนเดียวกัน: คูณทั้งเศษและส่วนด้วย √3 ได้ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ · เล่มนี้ตอบแบบไม่มีกรณฑ์ในตัวส่วน



07 มุม 45° และตารางค่าพิเศษ

ผ่า**รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส**ด้านละ 1 ตามแนวเส้นทแยงมุม ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วที่มีมุม 45° สองมุม

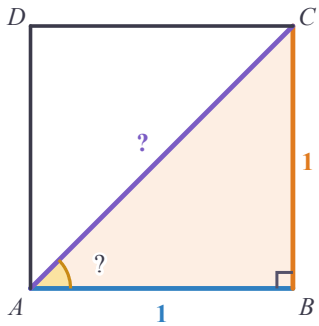
โจทย์ข้อ 1 จัตุรัส ABCD ด้านละ 1 ลากเส้นทแยงมุม AC

1 △ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว มุม A = มุม C = ☐

2 $AC^2 = 1^2 + 1^2 =$ ☐ ได้ $AC =$ ☐

3 $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ ☐ $\cos 45° =$ ☐ $\tan 45° =$ ☐

ผ่าจัตุรัสตามแนวทแยง



โจทย์ข้อ 2 เติมตารางค่าของมุม 30° 45° 60°

1 ใช้ผลจากบทเรียน 06 และโจทย์ข้อ 1 เติมให้ครบ 9 ช่อง

2 มุมใหญ่ขึ้น แถว sin ☐ แถว cos ☐

ตารางค่าพิเศษ

	30°	45°	60°
sin			
cos			
tan			

ก้าวขึ้นอีกขั้น

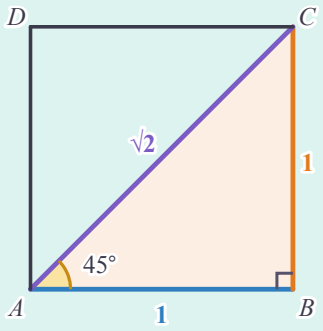
จำตารางด้วยแบบรูป

แถว sin ของ 30°, 45°, 60° คือ $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ข้างใต้รากเป็น 1, 2, 3) · แถว cos เรียงกลับกัน · tan = sin ÷ cos เช่น $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} =$ ☐



รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม 45° มีด้านเป็นอัตราส่วน **1 : 1 : √2** · $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\tan 45° = 1$

มุมแหลมใหญ่ขึ้น: sin และ tan เพิ่มขึ้น cos ลดลง



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

หาค่า (เขียนกรณฑ์ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย) ข้อ (8) แสดงวิธีทำ

(1) $\sin 45° \cos 45° =$ ☐

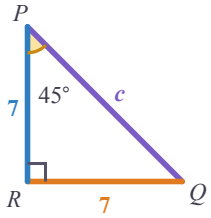
(2) $\tan 45° + \tan 60° \tan 30° =$ ☐

(3) $\sin 30° + \cos 45° =$ ☐

(4) $\sin^2 45° + \cos^2 30° =$ ☐

(5) ด้านตรงข้ามมุมฉาก

$c =$ ☐



(6) มุมแหลม θ ที่ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ ☐

และที่ $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ คือ ☐

(7) เรียงจากน้อยไปมาก: ☐ < ☐ < ☐

(8) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีเส้นทแยงมุมยาว 10 ซม. ด้านยาวเท่าใด (ตอบในรูปกรณฑ์ และค่าประมาณ ใช้ $\sqrt{2} \approx 1.414$)

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 $45°, 2, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$

โจทย์ข้อ 2 เพิ่มขึ้น, ลดลง, $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}$

ระวัง! $\sin 30° + \sin 60°$ **ไม่เท่ากับ** $\sin 90°$: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.37$ · ค่าตรีโกณมิติบวกกันโดยบวกมุมไม่ได้

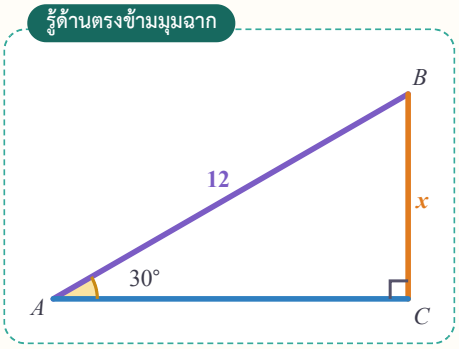


08 หาความยาวด้านด้วยมุมพิเศษ

รู้มุมแหลมหนึ่งมุมกับด้านหนึ่งด้าน ก็หาด้านที่เหลือได้: เลือกอัตราส่วนที่มี**ด้านที่รู้**และ**ด้านที่ต้องหา** แล้วแก้สมการ

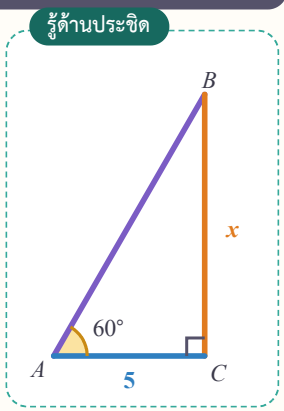
โจทย์ข้อ 1 ∠A = 30° รู้ด้านตรงข้ามมุมฉาก $AB = 12$ หาด้านตรงข้ามมุม A

1. x เป็นด้าน [ ] มุม A และ 12 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จึงใช้ [ ]
2. $\frac{x}{12} = \sin 30° =$ [ ]
3. $x = 12 \times \frac{1}{2} =$ [ ]



โจทย์ข้อ 2 ∠A = 60° รู้ด้านประชิด $AC = 5$ หาด้านตรงข้ามมุม A

1. รู้ด้านประชิด หาด้านตรงข้าม จึงใช้ [ ]
2. $\frac{x}{5} = \tan 60° =$ [ ] ได้ $x =$ [ ]
3. ค่าประมาณ ($\sqrt{3} \approx 1.732$): $x \approx 5 \times 1.732 =$ [ ]



ก้าวขึ้นอีกขั้น

เลือกอัตราส่วนอย่างไร

ดูว่า**รู้**ด้านไหน **หา**ด้านไหน แล้วเลือกตามตาราง · ตรวจคำตอบข้อ 1 ด้วยพีทาโกรัส: $AC = 6\sqrt{3}$ จึงได้ $6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 36 + 108 =$ [ ] $= 12^2$ ✓



(1) ทำเครื่องหมายด้านที่รู้กับด้านที่หา เทียบกับมุมที่รู้ค่า (2) เลือก sin / cos / tan ที่มีสองด้านนั้น (3) เขียนสมการ แล้วแก้ถ้า x อยู่ตัวส่วน ให้นำค่าที่รู้หารด้วยค่าตรีโกณมิติ (4) ตอบในรูปกรณฑ์อย่างง่าย หรือค่าประมาณตามที่โจทย์บอก

รู้ / หา	ตรงข้าม	ประชิด	ตรงข้ามมุมฉาก
ตรงข้าม	—	tan	sin
ประชิด	tan	—	cos
ตรงข้ามมุมฉาก	sin	cos	—

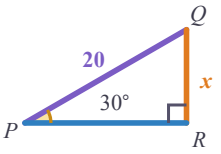
แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

หา x (ข้อที่มี √ ตอบทั้งรูปกรณฑ์และค่าประมาณ ใช้ $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$) ข้อ (7)–(8) แสดงวิธีทำ

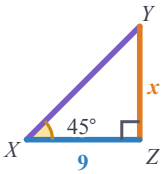
(1) ใช้ ☐

x = ☐



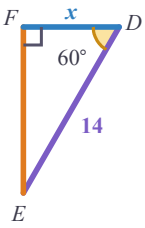
(2) ใช้ ☐

x = ☐



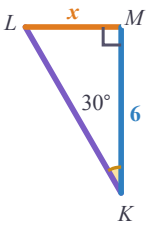
(3) ใช้ ☐

x = ☐



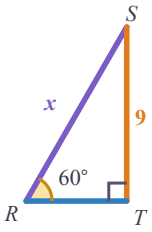
(4) ใช้ ☐

x = ☐ ≈ ☐



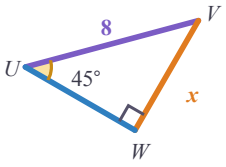
(5) ใช้ ☐

x = ☐ ≈ ☐



(6) ใช้ ☐

x = ☐ ≈ ☐



(7) △ABC มี $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AB = 10$ ต้นกล้าหา BC โดยเขียน $\cos 60° = \frac{BC}{10}$ ได้ $BC = 5$ ผิดตรงไหน ที่ถูกเป็นเท่าใด

(8) △ABC มี $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 5$ ซม. จงหาความยาวรอบรูป (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 ตรงข้าม , sin , $\frac{1}{2}$, 6 โจทย์ข้อ 2 tan , $\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, 8.66

ระวัง! ด้านตรงข้ามมุมฉากต้องยาวที่สุดเสมอ ถ้าได้ด้านตรงข้ามมุมฉากสั้นกว่าด้านอื่น แปลว่าคูณกับหารสลับกัน



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° และ 60°

คะแนน

/ 100



ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

1 10 คะแนน

$\sin 60° + \cos 30° =$ ☐ $\tan 45° - \sin 30° =$ ☐

2 10 คะแนน

$4 \sin 30° \cos 60° + \tan^2 60° =$ ☐

3 10 คะแนน

$\sin^2 30° + \sin^2 45° + \sin^2 60° =$ ☐

4 10 คะแนน

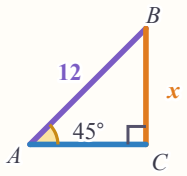
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีมุม 30° และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 18 ซม. จงหาความยาวด้านประกอบมุมฉากทั้งสอง

5 10 คะแนน

หามุมแหลม θ: $\tan\theta = 1$ ได้ $\theta =$ ☐ และ $2\cos\theta = 1$ ได้ $\theta =$ ☐

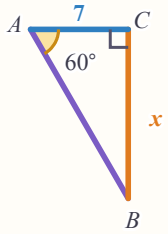
6 10 คะแนน

จากรูป จงหา x = ☐



7 10 คะแนน

จากรูป จงหา x (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$) x = ☐ ≈ ☐



8 10 คะแนน

$\triangle ABC$ มี $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 10$ น้ำฝนหาด้านตรงข้ามมุมฉากได้ $AB = 10 \times \sin 30° = 5$ น้ำฝนผิดตรงไหน ที่ถูกเป็นเท่าใด

9 10 คะแนน

สไลเดอร์ในสวนน้ำยาว 6 เมตร ทำมุม 30° กับพื้นราบ จุดบนสุดสูงจากพื้นกี่เมตร และปลายล่างห่างจากจุดใต้จุดบนสุดกี่เมตร (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

10 10 คะแนน

เติมค่า: $\cos 45° \times \tan 60° \times \sin 45°$ = ☐

ก้าวต่อไปสู่บทใหม่

ต่อไป: วัดสิ่งที่วัดตรง ๆ ไม่ได้

ความสูงของตึก ยอดเจดีย์ หรือระยะจากฝั่งถึงเรือ วัดด้วยตลับเมตรไม่ได้ แต่วัดมุมได้ บทที่ 3 ใช้มุมเงย มุมก้ม กับค่าในตารางนี้



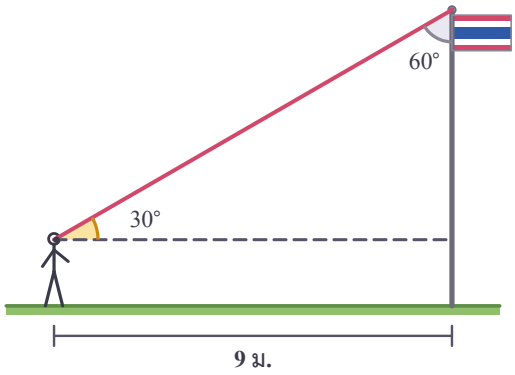
09 มุมเงยและมุมก้ม

เส้นที่ลากจากตาขนานกับพื้นราบ เรียกว่า**เส้นระดับสายตา** (เส้นประในรูป) เส้นจากตาไปยังสิ่งที่มองคือ**แนวสายตา** มุมระหว่างสองเส้นนี้คือ**มุมเงย** (มองขึ้น) หรือ**มุมก้ม** (มองลง)

โจทย์ข้อ 1 น้องฟ้ายืนห่างเสาธง 9 เมตร มองยอดเสาธง

1. มองขึ้น มุมระหว่างแนวสายตากับเส้นระดับสายตา เรียกว่า [ ]
2. จากรูป มุมเงย = [ ] (ส่วนมุม 60° ที่ยอดเสาเป็นมุมระหว่างแนวสายตากับ [ ])
3. สองมุมนี้รวมกันได้ [ ] เพราะเส้นระดับสายตาตั้งฉากกับเสา

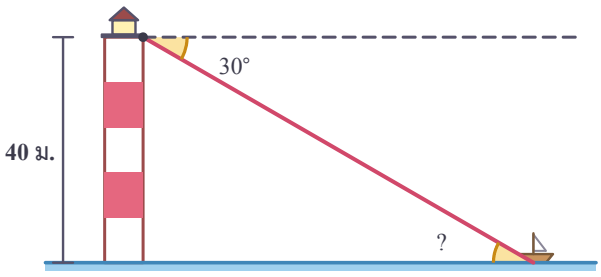
มองขึ้น: มุมเงย



โจทย์ข้อ 2 ผู้ดูแลประภาคารสูง 40 เมตร มองลงไปที่เรือ

1. มองลง มุมระหว่างเส้นระดับสายตากับแนวสายตา เรียกว่า [ ] = [ ]
2. เส้นระดับสายตา**ขนาน**กับผิวน้ำ มุมเงยจากเรือถึงยอดประภาคาร (มุม ?) = [ ] เพราะเป็น [ ]

มองลง: มุมก้ม



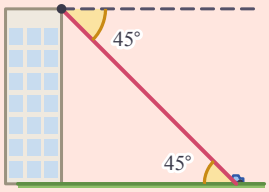
ก้าวขึ้นอีกขั้น

ทำเครื่องวัดมุมเงยเอง

ติดหลอดดูดบนไม้โปรแทรกเตอร์ แขวนลูกตุ้มที่จุดศูนย์กลาง เล็งยอดเสาผ่านหลอด เส้นด้ายชี้แนวดิ่ง ถ้าอ่านมุมระหว่างเส้นด้ายกับหลอดได้ 60° มุมเงยคือ 90° − 60° = [ ]



มุมเงย = มุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับสายตา เมื่อมองสิ่งที่อยู่**สูงกว่า**ระดับสายตา · **มุมก้ม** = มุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับสายตา เมื่อมองสิ่งที่อยู่**ต่ำกว่า** · มุมก้มจาก A ไป B = มุมเงยจาก B ไป A (มุมแย้ง)

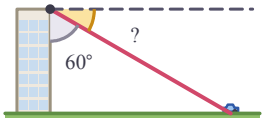


แบบฝึกหัดเบื้องต้น

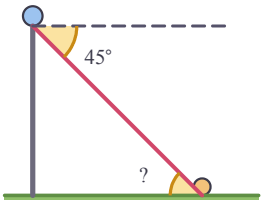
เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

เติมคำตอบ ข้อ (4) แสดงเหตุผล ข้อ (5)–(6) วาดในกรอบ

(1) มองจากดาดฟ้าลงไปที่รถ มุมระหว่างแนวสายตากับผนังตึกเป็น 60° มุมก้ม = ☐



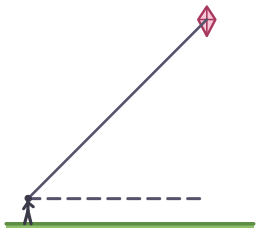
(2) นกบนยอดเสามองแมวด้วยมุมก้ม 45° แมวมองนกด้วยมุมเงย ☐



(3) มุมเงยและมุมก้มวัดจาก ☐ เสมอ ไม่ใช่วัดจากแนวดิ่ง (เสา ผนังตึก)

(4) ข้าวหอมวัดมุมก้มจากหน้าต่างไปยังรถได้ 60° โดยวัดระหว่างแนวสายตากับผนังตึก ถูกหรือไม่ มุมก้มจริงเป็นเท่าใด

(5) ทำเครื่องหมายมุมเงยจากตาถึงว่าว



(6) ร่างรูป: ยืนบนสะพานสูง 10 ม. มองเรือด้วยมุมก้ม 30°

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 มุมเงย , 30° , เสาธง , 90°

โจทย์ข้อ 2 มุมก้ม , 30° , 30° , มุมแย้ง

ระวัง! อย่าวัดมุมเงยหรือมุมก้มจากเสา ผนัง หรือตัวคน (แนวดิ่ง) · ทุกครั้งให้ลากเส้นระดับสายตา (เส้นประ) ก่อน แล้วจึงทำเครื่องหมายมุม



10 หาความสูงและระยะทาง

ร่างรูป ทำเครื่องหมายมุมเงยหรือมุมก้ม จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งรูป แล้วใช้วิธีเลือกอัตราส่วนจากบทเรียน 08 (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

โจทย์ข้อ 1 ยืนห่างเสาธง 12 ม. ระดับสายตาสูง 1.5 ม. มุมเงยถึงยอดเสา 30° เสาสูงเท่าใด

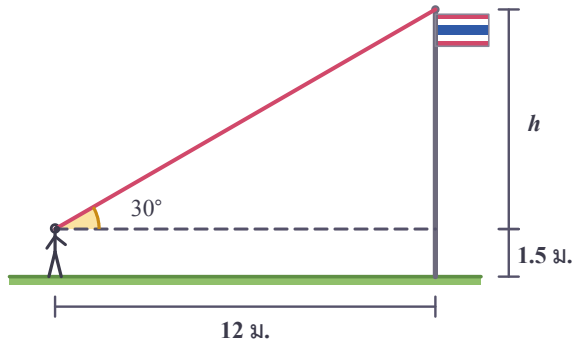
1 ส่วนของเสาที่สูงกว่าระดับสายตา: $\tan 30° = \frac{h}{12}$ ได้

$h = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{3} =$ ☐

2 $h \approx 4 \times 1.732 =$ ☐ ม.

3 เสาธงสูง $= h + 1.5 \approx$ ☐ ม.

รู้ระยะ หาความสูง



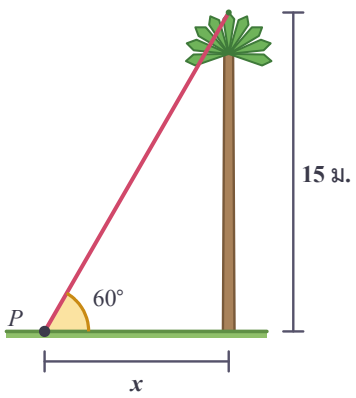
โจทย์ข้อ 2 มองยอดต้นตาลสูง 15 ม. จากจุด P บนพื้นด้วยมุมเงย 60° P ห่างโคนต้นตาลเท่าใด

1 รู้ด้านตรงข้าม (15) หาด้านประชิด (x) จึงใช้ ☐:

$\tan 60° = \frac{15}{x}$

2 $x = 15 \div \sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{3} =$ ☐ $\approx$ ☐ ม.

รู้ความสูง หาระยะ



ก้าวขึ้นอีกขั้น

ว่าว: รู้ความยาวเชือก

เชือกว่าวคือ**ด้านตรงข้ามมุมฉาก** จึงใช้ sin: เชือกยาว 40 ม. มุมเงย 30° ว่าวสูงกว่ามือ $40 \times \sin 30° =$ ☐ ม. · รู้ระยะบนพื้นหรือความสูง ใช้ tan



(1) ร่างรูป ลากเส้นระดับสายตา ทำเครื่องหมายมุม (2) เขียนด้านที่รู้และด้านที่หา (3) เลือก sin / cos / tan แล้วแก้สมการ (4) **บวกความสูงระดับสายตา**ถ้ามุมวัดจากตา (5) ใช้ค่าประมาณที่โจทย์กำหนด ปัดเศษเฉพาะขั้นสุดท้าย



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

ร่างรูปทุกข้อก่อนคำนวณ (ฉบับครูมีรูปบางข้อ) ตอบทั้งรูปกรณฑ์และค่าประมาณ ทศนิยม 2 ตำแหน่ง

(1) ยืนห่างโคนต้นตาล 20 ม. วัดมุมเงยจากพื้นถึงยอดต้นตาลได้ 45° ต้นตาลสูงเท่าใด

(2) ชักว่าวด้วยเชือกยาว 80 ม. เชือกทำมุมเงย 30° มือที่ถือเชือกสูงจากพื้น 1.2 ม. ว่าวอยู่สูงจากพื้นเท่าใด

(3) จากดาดฟ้าตึกสูง 45 ม. มองเห็นรถที่จอดบนพื้นด้วยมุมก้ม 60° รถอยู่ห่างจากตึกเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

(4) ยอดประภาคารสูงจากระดับน้ำทะเล 40 ม. มองเห็นเรือด้วยมุมก้ม 30° เรืออยู่ห่างฐานประภาคารเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

(5) บันไดยาว 6 ม. พาดกำแพงตั้งตรง ทำมุม 60° กับพื้น ปลายบันไดแตะกำแพงสูงจากพื้นเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

(6) ยืนห่างเสาธง 6 ม. ระดับสายตาสูงจากพื้น 1.5 ม. มุมเงยถึงยอดเสาธง 60° เสาธงสูงเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย
โจทย์ข้อ 1 $4\sqrt{3}$, 6.93 , 8.43 โจทย์ข้อ 2 tan , $5\sqrt{3}$, 8.66

ระวัง! มุมที่วัดจากตา ได้ความสูง**เหนือระดับสายตา**เท่านั้น อย่าลืมบวกความสูงระดับสายตา · มุมวัดจากพื้น (จุดบนพื้น) ไม่ต้องบวก



11 โจทย์ที่มีสองรูปสามเหลี่ยม

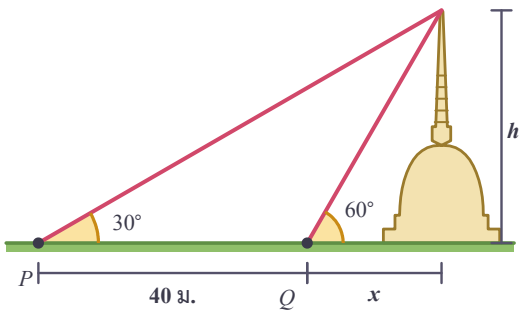
ถ้ามีมุมสองค่า จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปที่**ใช้ด้านร่วมกัน** เขียนสมการจากแต่ละรูป แล้วแก้ร่วมกัน (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{2} \approx 1.414$)

โจทย์ข้อ 1

จาก P มองยอดเจดีย์ด้วยมุมเงย 30° เดินเข้าหาอีก 40 ม. ถึง Q มุมเงยเป็น 60° เจดีย์สูงเท่าใด

1. รูปเล็ก (มอง Q): $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$ ได้ $h =$ ☐
2. รูปใหญ่ (มอง P): $\tan 30^\circ = \frac{h}{x+40}$ ได้ $\sqrt{3}\,h = x + 40$ แทน h: $3x = x + 40$ ได้ $x =$ ☐
3. $h =$ ☐ $\approx$ ☐ ม.

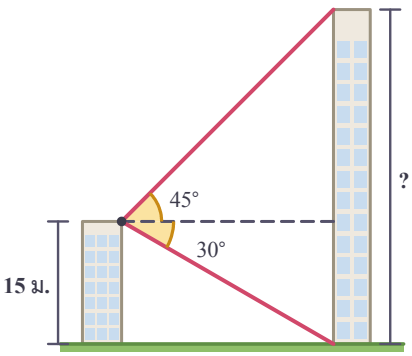
สองจุดบนพื้น



โจทย์ข้อ 2

จากดาดฟ้าตึกสูง 15 ม. มองโคนตึกฝั่งตรงข้ามด้วยมุมก้ม 30° และยอดตึกนั้นด้วยมุมเงย 45°

มองขึ้นและมองลง



1. มองโคน: $\tan 30^\circ = \frac{15}{d}$ ได้ระยะห่าง $d =$ ☐
2. มองยอด: ส่วนที่สูงกว่าดาดฟ้า $= d \tan 45^\circ =$ ☐
3. ตึกฝั่งตรงข้ามสูง $15 + 15\sqrt{3} \approx$ ☐ ม.

ก้าวขึ้นอีกขั้น

ทางลัดของมุม 30° กับ 60°

ในรูปข้อ 1 มุมที่ Q ด้านนอกเป็น 120° มุมที่ยอดเจดีย์ของรูปสามเหลี่ยม PQT จึงเป็น ☐ รูปนี้เป็น**สามเหลี่ยมหน้าจั่ว** QT = PQ = 40 ม. ได้ $h = 40 \times \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$ เท่ากัน



(1) ร่างรูป แยกรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป (2) ให้ตัวแปรกับ**ด้านที่ใช้ร่วมกัน** (มักเป็นความสูงหรือระยะบนพื้น) (3) เขียนสมการจากแต่ละรูป แล้วแก้ระบบ (4) ใช้ค่าประมาณตอนท้าย ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง



แบบฝึกหัดเบื้องต้น

➜ เฉลยท้ายเล่ม หน้า 32

แสดงวิธีทำ (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$) ตอบทั้งรูปกรณฑ์และค่าประมาณ

(1) จากจุด A บนพื้น มองยอดเสาไฟฟ้าแรงสูงด้วยมุมเงย 30° เดินตรงเข้าหาเสาอีก 50 ม. ถึงจุด B มุมเงยเป็น 60° เสาสูงเท่าใด

(2) จากจุด A มองยอดตึกด้วยมุมเงย 45° เดินเข้าหาตึกอีก 20 ม. ถึงจุด B มุมเงยเป็น 60° ตึกสูงเท่าใด

(3) จากดาดฟ้าตึกสูง 12 ม. มองโคนตึกฝั่งตรงข้ามด้วยมุมก้ม 45° และมองยอดตึกนั้นด้วยมุมเงย 30° ตึกฝั่งตรงข้ามสูงเท่าใด

(4) ยอดประภาคารสูง 60 ม. มองเรือสองลำที่อยู่ด้านเดียวกันในแนวเดียวกับฐาน ด้วยมุมก้ม 60° และ 30° เรือสองลำห่างกันเท่าใด

(5) หอคอยสูง 30 ม. คนสองคนยืนบนพื้นคนละฟากของหอคอย มองยอดหอคอยด้วยมุมเงย 30° และ 45° สองคนนี้ยืนห่างกันเท่าใด

(6) เดินตรงเข้าหาหอนาฬิกา มุมเงยถึงยอดเปลี่ยนจาก 30° เป็น 60° หลังเดินได้ 100 ม. หอนาฬิกาสูงเท่าใด

เฉลยโจทย์หน้าซ้าย

โจทย์ข้อ 1 $\sqrt{3}x$, 20 , $20\sqrt{3}$, 34.64 โจทย์ข้อ 2 $15\sqrt{3}$, $15\sqrt{3}$, 40.98

ระวัง! ระยะ 40 ม. คือระยะ**ระหว่างจุดสองจุด** ไม่ใช่ระยะถึงโคนเจดีย์ · ปัดเศษเฉพาะขั้นสุดท้าย ถ้าปัดกลางทางคำตอบจะคลาด



แบบทดสอบทบทวน

บทที่ 3 การนำไปใช้: มุมเงยและมุมก้ม

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คะแนน

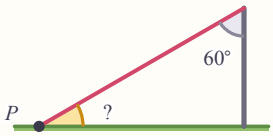
_____

/ 100



1 10 คะแนน

จากรูป มุมเงยจาก P ถึงยอดเสาเท่ากับ ☐



2 10 คะแนน

จากยอดตึกมองรถด้วยมุมก้ม 45° คนที่รถมองยอดตึกด้วยมุมเงย ☐ เพราะเป็น ☐

3 10 คะแนน

ยืนห่างตึก 30 ม. วัดมุมเงยจากพื้นถึงยอดตึกได้ 60° ตึกสูงเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

4 10 คะแนน

ยืนห่างต้นไม้ 10 ม. ระดับสายตาสูง 1.6 ม. มุมเงยถึงยอดต้นไม้ 45° ต้นไม้สูงเท่าใด

5 10 คะแนน

ยืนบนหน้าผาสูง 50 ม. มองเห็นเรือด้วยมุมก้ม 45° เรืออยู่ห่างตีนหน้าผาเท่าใด

6 10 คะแนน

ชักว่าวด้วยเชือกยาว 50 ม. เชือกทำมุมเงย 60° มือสูงจากพื้น 1 ม. ว่าวสูงจากพื้นเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

7 10 คะแนน

หอคอยสูง 20 ม. มุมเงยจากจุด A บนพื้นถึงยอดหอคอยเป็น 30° แป้งเขียน $\tan 30^\circ = \frac{x}{20}$ เพื่อหาระยะ x จาก A ถึงโคนหอคอย แป้งผิดตรงไหน ที่ถูกเป็นเท่าใด

8 10 คะแนน

จากจุดบนพื้นมองยอดเจดีย์ด้วยมุมเงย 30° เดินเข้าหาเจดีย์อีก 60 ม. มุมเงยเป็น 60° เจดีย์สูงเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

9 10 คะแนน

จากดาดฟ้าตึกสูง 20 ม. มองโคนเสาธงด้วยมุมก้ม 60° และมองยอดเสาด้วยมุมเงย 30° เสาธงสูงเท่าใด

10 10 คะแนน

คนสองคนยืนบนพื้นห่างกัน 400 ม. บอลลูนลอยอยู่เหนือจุดหนึ่งระหว่างสองคน สองคนมองบอลลูนด้วยมุมเงย 30° และ 60° บอลลูนสูงเท่าใด (ใช้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

ก้าวต่อไปเรียนรู้

ตรีโกณมิติรอบตัว

ช่างสำรวจวัดความสูงของภูเขา วิศวกรออกแบบทางลาดและหลังคา นักเดินเรือหาระยะถึงฝั่ง ล้วนใช้ sin cos tan ใน ม.4–6 จะได้เรียนค่าของมุมอื่น ๆ และฟังก์ชันตรีโกณมิติ



เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

01 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(1) QR , PR , PQ (2) XZ , YZ , XY (3) EF , DF , DE (4) KM , LM , KL (5) CD , AC

(6) ไม่ถูก AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้านประชิดมุม A คือ AC

02 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน

(1) 15 , 36 (2) เท่ากัน , ไม่เท่ากัน (3) 12 (4) 0.75 (5) บันได ข (สูง : ระยะห่าง = 0.8 มากกว่า 0.75)

(6) ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 20 ซม. ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 25 ซม.

03 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

(1) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$ (3) $\frac{20}{29}$, $\frac{21}{29}$, $\frac{20}{21}$ (4) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ (5) $\cos D$, $\tan D$

(6) ใช้ด้านประชิดแทนด้านตรงข้าม · $\sin A = \frac{3}{5}$

04 หาอัตราส่วนจากข้อมูลบางส่วน

(1) 15 , $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ (2) 24 , $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$ (3) $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$

(5) รูปที่มีด้านตรงข้าม 4 ประชิด 3 ตรงข้ามมุมฉาก 5 · $\sin A = \frac{4}{5}$

(6) ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 8 ซม. ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 ซม.

05 ความสัมพันธ์ของ sin cos tan

(1) $\frac{5}{12}$ (2) 0.75 (3) 65° , 18° (4) $\frac{7}{25}$ (5) 1 (6) $\sin A = \frac{5}{13}$

(7) ไม่ได้ เพราะ $\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{1}{2}$ ไม่เท่ากับ 1

06 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60°

(1) 1 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 (4) 1 (5) 5 , $5\sqrt{3}$ (6) 8 , $4\sqrt{3}$ (7) 60° , 30°

(8) ไม่จริง $2 \sin 30° = 1$ แต่ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เฉลยแบบฝึกหัดเบื้องต้น

07 มุม 45° และตารางค่าพิเศษ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $7\sqrt{2}$ (6) 45° , 30° (7) cos 60° , cos 45° , cos 30°

(8) $5\sqrt{2} \approx 7.07$ ซม.

08 หาความยาวด้านด้วยมุมพิเศษ

(1) sin , 10 (2) tan , 9 (3) cos , 7 (4) tan , $2\sqrt{3}$, 3.46 (5) sin , $6\sqrt{3}$, 10.39 (6) sin , $4\sqrt{2}$, 5.66

(7) BC เป็นด้านตรงข้ามมุม A ต้องใช้ sin · $BC = 5\sqrt{3}$ (8) $15 + 5\sqrt{3} \approx 23.66$ ซม.

09 มุมเงยและมุมก้ม

(1) 30° (2) 45° (3) เส้นระดับสายตา (4) ไม่ถูก มุมก้ม = 90° − 60° = 30°

(5) มุมระหว่างเส้นระดับสายตา (เส้นประ) กับเส้นเชือกว่าว (6) รูปร่าง: เส้นระดับสายตาจากตา มุม 30° ลงไปที่เรือ

10 หาความสูงและระยะทาง

(1) 20 ม. (2) 41.2 ม. (3) $15\sqrt{3} \approx 25.98$ ม. (4) $40\sqrt{3} \approx 69.28$ ม. (5) $3\sqrt{3} \approx 5.20$ ม.

(6) $6\sqrt{3} + 1.5 \approx 11.89$ ม.

11 โจทย์ที่มีสองรูปสามเหลี่ยม

(1) $25\sqrt{3} \approx 43.30$ ม. (2) $30 + 10\sqrt{3} \approx 47.32$ ม. (3) $12 + 4\sqrt{3} \approx 18.93$ ม. (4) $40\sqrt{3} \approx 69.28$ ม.

(5) $30 + 30\sqrt{3} \approx 81.96$ ม. (6) $50\sqrt{3} \approx 86.60$ ม.

บันทึกความก้าวหน้าของฉัน

ทำเสร็จแล้วกา ✓ ในช่อง บทเรียนไหนยังไม่มั่นใจ กาช่องสุดท้ายไว้กลับมาทบทวน

บทเรียน	เรียนหน้าซ้าย	ทำแบบฝึก	ทำถูก	อยากทบทวน
บทที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ				
01 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	☐	☐	____ / 6	☐
02 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน	☐	☐	____ / 6	☐
03 ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์	☐	☐	____ / 6	☐
04 หาอัตราส่วนจากข้อมูลบางส่วน	☐	☐	____ / 6	☐
05 ความสัมพันธ์ของ sin cos tan	☐	☐	____ / 7	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 1			____ / 100	☐
บทที่ 2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° 45° และ 60°				
06 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60°	☐	☐	____ / 8	☐
07 มุม 45° และตารางค่าพิเศษ	☐	☐	____ / 8	☐
08 หาความยาวด้านด้วยมุมพิเศษ	☐	☐	____ / 8	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 2			____ / 100	☐
บทที่ 3 การนำไปใช้: มุมเงยและมุมก้ม				
09 มุมเงยและมุมก้ม	☐	☐	____ / 6	☐
10 หาความสูงและระยะทาง	☐	☐	____ / 6	☐
11 โจทย์ที่มีสองรูปสามเหลี่ยม	☐	☐	____ / 6	☐
แบบทดสอบทบทวน บทที่ 3			____ / 100	☐



ครบทุกช่องแล้ว เก่งมาก! อัตราส่วนตรีโกณมิติจะได้ใช้ต่อใน ม.4–6 ทั้งฟังก์ชันตรีโกณมิติและการวัดระยะทางที่วัดตรง ๆ ไม่ได้

บันทึก

One by One
Step by Step

เรียนทีละบท ฝึกทีละขั้น

หนังสือชุด One by One ม.3

1. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
2. การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง
3. สมการกำลังสองตัวแปรเดียว
4. ความคล้าย
5. กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง
6. สถิติ (3) แผนภาพกล่อง
7. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
8. วงกลม
9. พีระมิด กรวย และทรงกลม
10. ความน่าจะเป็น
11. **อัตราส่วนตรีโกณมิติ**



Math Step Studio
mathstepstudio.com